

G. Loff
Frankfurt 1977

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Elektron - Positron Paarerzeugung im Schwerionenstoß

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik der

Johann Wolfgang Goethe - Universität

zu Frankfurt am Main



von

Gerhard Soff

aus Amöneburg

Frankfurt am Main

1976



Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik

der Johann Wolfgang Goethe - Universität

zu Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. E. Schopper

Leiter der Arbeit: Prof. Dr. W. Greiner

Erstgutachter: Prof. Dr. W. Greiner

Zweitgutachter: Prof. Dr. B. Müller

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Januar 1977

Inhaltsverzeichnis

- I Einleitung

- II Zur spontanen und induzierten Positronenerzeugung
in überkritischen Feldern
 - 1) Bestimmung von kritischen Feldern
 - a) Elektronenniveaus in superschweren Atomen
 - b) Übergangsraten von Elektronen
 - c) Das Kontinuum in starken elektrischen Feldern
 - 2) Ionisationswahrscheinlichkeiten für innere
Elektronenniveaus in superschweren Quasimolekülen

- III Das Abschütteln der Vakuumpolarisationsladungsdichte
in quasimolekularen Stößen von sehr schweren Kernen.
Direkte Elektron - Positron Paarproduktion

- IV Paarbildung durch Konversion von Bremsstrahlungsphotonen
 - 1) Nukleare Bremstrahlung
 - 2) Konversionskoeffizienten zur inneren Paarbildung
 - 3) Wirkungsquerschnitte zur e^+, e^- - Produktion

V Innere Paarbildung erzeugt durch Coulombanregung
von schweren Kernen

- 1) Bestimmung des Wirkungsquerschnittes
- 2) Coulombanregung im Schwerionenstoß
- 3) Die Verteilung der Positronen in bezug auf ihre
kinetische Energie und dem Schwerionenstreuwinkel
- 4) Weitere Paarerzeugungsprozesse
- 5) Ionisation durch Kern - Coulombanregung
- 6) Das Photonenspektrum

VI Näherungsverfahren für Streuprozesse im
relativistischen Bereich

- 1) Die Methode der äquivalenten Photonen.
Das klassische Photonenspektrum
- 2) e^+, e^- - Erzeugung mit der Methode der äquivalenten
Photonen
- 3) K - Schalen Ionisation in relativistischen
Schwerionenstößen

VII Elektron - Positron Erzeugung im relativistischen
Schwerionenstoß

- 1) Historische Betrachtungen zum Zwei - Photonen Prozeß
- 2) Der differentielle Wirkungsquerschnitt
- 3) Paarerzeugung durch virtuelle Photonen
- 4) Phasenraumtransformation
- 5) Analytische Integration des differentiellen
Wirkungsquerschnittes und Bestimmung der Integralgrenzen

VIII Zusammenfassung der Resultate

IX Anhang A

Anhang B

Anhang C

Anhang D

X Literaturverzeichnis

XI Figuren - und Tabellenbeschreibung

XII Lebenslauf

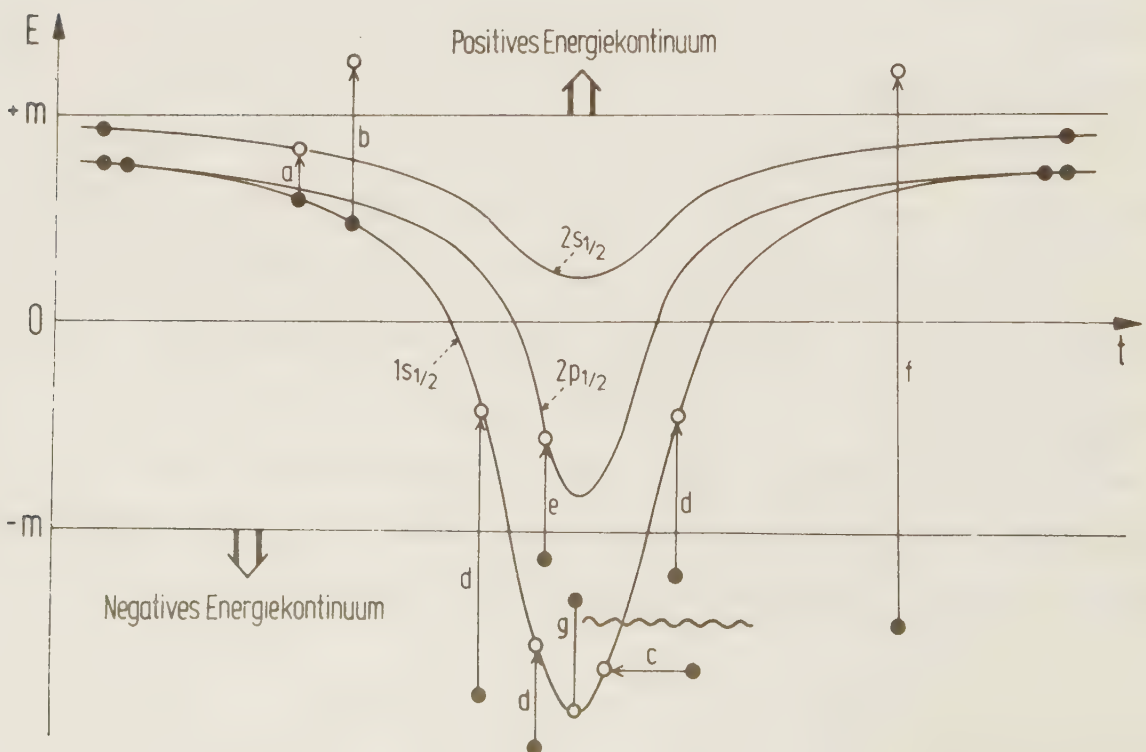
XIII Danksagung

I Einleitung

Das Studium der Positronenerzeugung im Schwerionenstoß führt zu neuen, fundamentalen Prozessen der Physik. Hierzu zählen der Zerfall des neutralen Vakuums in ein geladenes Vakuum durch die spontane und induzierte Positronenproduktion in überkritischen Feldern und das Abschütteln der Vakuumpolarisationswolke im Stoß schwerer Kerne.

In dieser Arbeit werden zunächst begleitende Untersuchungen zur spontanen und induzierten Positronenerzeugung durchgeführt. Es erfolgt eine genaue Bestimmung der kritischen elektrischen Felder sowie der Erzeugungsrate und Lebensdauer von Löchern in inneren Elektronenschalen des quasimolekularen Blei - Blei und des Uran - Uran Systems. Das Vorhandensein dieser Löcher ist notwendige Voraussetzung für die experimentelle Beobachtbarkeit des Zerfalls des neutralen Vakuums ebenso wie für eine mögliche Spektroskopie von superschweren Quasiatomen. Zur Veranschaulichung sind in Figur a die totalen Energien des $1s$, $2s$ und $2p_{1/2}$ - Elektrons als Funktion der Stoßzeit t im Uran - Uran Frontalstoß qualitativ aufgetragen. Die Energie des $1s$ - Elektrons erreicht bei einem Abstand R_{krit} der beiden Ladungszentren den Wert $E = -m_e c^2$ und taucht anschließend in das negative Energiekontinuum ein, das nach Dirac's Löchertheorie mit Elektronen vollbesetzt ist. Die zum Zwei - Zentren Abstand R_{krit} zugehörigen

elektrischen Felder bezeichnet man als kritisch. Sind durch den Übergang in höhere gebundene Niveaus, zum Beispiel in den leeren $2s$ - Zustand (Prozeß a), oder durch direkte Ionisation in das obere Kontinuum (Prozeß b) Löcher im $1s$ - Niveau erzeugt worden, so eröffnet dies die Möglichkeit der energielosen spontanen (Prozeß c) oder induzierten Positronenerzeugung (Prozeß d) durch den Übergang von Kontinuumselektronen aus dem Dirac - See in die gebundene K - Schale. Das verbleibende Loch im Dirac - See ist definitionsgemäß ein Positron. Haben sich die Uran - Kerne wieder vollständig getrennt, so hat man im Endzustand eine vollbesetzte K - Schale und Positronen, die aufgrund der Coulombwechselwirkung vom Atomkern abgestoßen und in einem Detektor nachgewiesen werden können.



Die Energie für die induzierte Positronenerzeugung d und den induzierten Übergang vom unteren Kontinuum in das unterkritische $2p_{1/2}$ - Niveau (Prozeß e) sowie für die Locherzeugung a und b als auch für die direkte Paarerzeugung (Prozeß f) wird der Kernbewegung entnommen. Dagegen findet die spontane Erzeugung c energielos statt, beim spontanen Strahlungsübergang g wird sogar noch die Energie des emitierten Photons gewonnen. Als Umkehrung des Prozesses c ist auch energielose Paarvernichtung prinzipiell möglich, das heißt Materie verschwindet ohne Emission von Photonen im Vakuum. Hierbei vernichten sich ein Elektron des eingetauchten $1s$ - Zustandes und ein Positron der gleichen Energie. Im Endzustand hat man einen aufgefüllten Dirac - See und ein Loch in der K - Schale, das durch einen Strahlungsübergang von Elektronen aus höheren gebundenen Zuständen gefüllt wird. Als Umkehrung von Prozeß g können tief in den Dirac - See eingetauchte K - Schalen Elektronen aus energetischen Gründen nicht mehr durch niederenergetische Positronen vernichtet werden, was erstmals die Koexistenz von Materie und Antimaterie erlaubt.

Der Formalismus und die technische Berechnung der spontanen und induzierten Positronenproduktion sollen in dieser Arbeit nicht wiederholt werden, hierzu sei auf die Übersichtsartikel 1 - 3) verwiesen. Die im Prozeß f aufgezeigte direkte Paarerzeugung, wobei Positron und

Elektron im Detektor nachgewiesen werden können, resultiert aus dem Abschüttel der virtuellen Vakuumpolarisationswolke durch die Dynamik im Schwerionenstoß. Ähnlich wie die gebundenen Elektronenzustände zeigen auch die Kontinuumswellenfunktionen für $(Z_1+Z_2)\alpha = Z\alpha > 1$ eine starke Abhängigkeit von der effektiven Kernladungszahl Z beziehungsweise vom Zwei - Zentren Abstand R , was zu einer stark ausgeprägten Vakuumpolarisationswolke bei $R \sim 0$ führt. Die kollektive Wechselwirkung zahlreicher Photonen mit dem Elektron - Positron Paar führt zu einer extremen Ladungsabhängigkeit ($\sigma \sim Z^{18}$) für diesen Effekt. Die berechneten differentiellen und totalen Querschnitte liegen im experimentell meßbaren Bereich.

In den nachfolgenden Kapiteln wird der Einfluß einiger Hintergrundeffekte wie zum Beispiel die Paarbildung durch Konversion von Bremsstrahlungsphotonen und innere Paarbildung induziert durch nukleare Coulombanregung im Schwerionenstoß diskutiert. In diesem Zusammenhang wurden bereits erste Messungen zur inneren Paarbildung in den superschweren Systemen Xenon - Blei und Xenon - Uran am Schwerionenbeschleuniger UNILAC der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI Darmstadt) mit Ionenenergien im Bereich der Coulombbarriere durchgeführt. Auch hinsichtlich einer möglichen Spektroskopie von superschweren Quasimolekülen können diese Hintergrundeffekte

nicht vernachlässigt werden und müssen daher genau berechnet werden.

Abschließend wird die Paarerzeugung in relativistischen Schwerionenstößen behandelt, wo aufgrund der großen Kernladungszahlen eine hohe Produktionsrate ($\sigma \sim Z_1^2 \cdot Z_2^2$) verglichen mit Elementarteilchen Stößen erwartet wird. Im Gegensatz zum nichtrelativistischen Schwerionenstoß werden hier Kollektiveffekte vernachlässigt, so daß die e^+, e^- - Erzeugung vollständig durch den Zwei - Photonen Prozeß beschrieben wird.

II Zur spontanen und induzierten Positronenerzeugung in überkritischen Feldern

1) Bestimmung von kritischen Feldern

a) Elektronenniveaus in superschweren Atomen

Die Elektronenniveaus der bekannten Elemente zwischen Wasserstoff ($Z = 1$) und Fermium ($Z = 100$) sind sehr genau vermessen und berechnet. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment bezüglich der niedrigsten Elektronenniveaus im Fermium liegt in der Größenordnung von 10^{-4} (Ref. 4). Dabei ist es unumgänglich, für die theoretische Beschreibung der stark gebundenen Elektronen das relativistische Analogon zur Schrödinger - Gleichung, die Dirac - Gleichung zu verwenden ($\hbar = c = 1$)

$$(\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m_e + V) \Psi = E \Psi \quad (\text{II.1})$$

$\vec{\alpha}$ und β sind die Dirac'schen Matrizen⁵⁾. Selbst für Elemente mit Ordnungszahlen $Z \sim 70$ ändern die relativistischen Effekte den Energieeigenwert der $1s$ - Elektronen bereits im Bereich von 10% ⁶⁾.

Zunächst sollen die Energien der Elektronen für die Elemente zwischen Fermium und $Z = 173$ berechnet werden. Die physikalische Relevanz dieser Untersuchungen liegt einerseits in einer möglichen Spektroskopie dieser Systeme im Schwerionenstoß und andererseits in einer

genauen Bestimmung der kritischen Ladung begründet, bei der die spontane Positronenerzeugung ermöglicht wird. Für den Fall eines Coulombpotentials $V(r) = -Z\alpha/r$, das zu einem punktförmig idealisierten Atomkern mit der Ladungszahl Z gehören würde, lassen sich dazu analytische Lösungen finden. Man erhält für die Bindungsenergie der Elektronen $E_B = E - m_e$ die Sommerfeld'sche Feinstrukturformel

$$E_B = m_e \left\{ \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n-j-1/2 + \sqrt{(j+1/2)^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} - 1 \right\} \quad (\text{II.2})$$

und gleichzeitig zwei Kontinua zu positiven Energien $E > m_e$ und zu negativen Energien mit $E < -m_e$. Hierbei ist m_e die Ruheenergie des Elektrons, $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137.03602$ die Feinstrukturkonstante, n die Hauptquantenzahl und j der Gesamtdrehimpuls des Elektrons. Im Sinne von Dirac's Löchertheorie müssen die Lösungen zu negativer Energie als mit Elektronen besetzt angenommen werden, sonst könnten Elektronen aus den oberen positiven Zuständen durch Strahlungsübergänge in beliebig tiefe Niveaus übergehen. Aus Formel (II.2) wird sofort ersichtlich, daß für Zustände mit $j = 1/2$ und $Z > \alpha^{-1}$ keine Lösungen mehr gefunden werden können, da der Radikand der Wurzel im Nenner negativ wird. Als Funktion der Ordnungszahl Z ist das Lösungsspektrum der Diracgleichung in Figur 1 aufgetragen. Nur die niedrigsten gebundenen Elektronenzustände sind eingezeichnet. Die gestrichelten Linien kennzeichnen

qualitativ den Punktkernfall. Von zahlreichen Autoren⁷⁻¹²⁾ konnte gezeigt werden, daß unter Verwendung des Potentials zu einem realistischen, ausgedehnten Atomkern für das 1s - Niveau noch Lösungen bis etwa $Z \sim 170$ gefunden werden können, wo die Bindungsenergie den doppelten Wert der Ruhemasse erreicht. Für die Kernladungsdichteverteilung $\rho(r)$ wurde im allgemeinen eine Kastenform angesetzt

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \text{const} \quad \text{für } r < R_{\text{eq}} \\ \rho(r) &= 0 \quad \text{für } r > R_{\text{eq}} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Als Potential resultiert hieraus als Lösung der Poissongleichung

$$V = - \frac{Z\alpha}{2R_{\text{eq}}} \left(3 - \frac{r^2}{R_{\text{eq}}^2} \right) \quad \text{für } r \leq R_{\text{eq}} \quad (\text{II.4})$$

$$V = - Z\alpha/r \quad \text{für } r > R_{\text{eq}}$$

R_{eq} ist der Äquivalentradius eines Atomkerns, den wir nach der Beziehung

$$R_{\text{eq}} = r_0 A^{1/3} \quad \text{mit } r_0 = 1.2 \text{ fm} \quad (\text{II.5})$$

und der Kernmassenzahl

$$A = 0.00733 Z^2 + 1.3 Z + 63.6 \quad (\text{II.6})$$

berechnet haben.

Alternativ haben wir in weiterführenden Rechnungen für die Kernladungsdichteverteilung einen zwei - parametrigen Fermiansatz gemacht, der im Bereich der bekannten Elemente die experimentellen Daten hervorragend beschreibt

$$\rho(r) = N \{ 1 + \exp([(r-c)/t]4\ln 3) \}^{-1} \quad (\text{II.7})$$

Den Normierungsfaktor erhält man numerisch aus der Bedingung

$$4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr = Z \quad (\text{II.8})$$

Auch das zugehörige Potential läßt sich nur durch numerische Integration gewinnen. t ist die Oberflächendicke der Kernladungsverteilung und gibt den Bereich an, in dem die Ladungsdichte von 90% auf 10% ihres Wertes am Ursprung abgesunken ist. Für alle superschweren Kerne setzen wir t konstant gleich $t = 2.2 \text{ fm}$, was dem aus dem Experiment gewonnenen Mittelwert für die bekannten Elemente entspricht. Der Halbdichte - Radius c folgt aus der Forderung (II.5) für den Äquivalentradius der Fermiverteilung.

Weitere Korrekturen zum Coulombpotential ergeben sich aus der Elektron - Elektron Wechselwirkung und aus quantenelektrodynamischen Effekten wie Vakuumpolarisation und Selbstenergie des Elektrons. Als erste Abschätzung für die Elektron - Elektron Wechselwirkung wurde das numerisch berechnete Thomas - Fermi Potential in die radiale Diracgleichung¹³⁾ eingesetzt.

$$\frac{du_1}{dr} = - \frac{\kappa}{r} u_1 + (E + m_e - V) u_2 \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{du_2}{dr} = - (E - m_e - V) u_1 + \frac{\kappa}{r} u_2$$

Im Zusammenhang mit der Einzentren - Diracgleichung wurden stets sphärisch symmetrische Potentiale angenommen, so daß die Winkel in Gleichung (II.1) abgespalten werden konnten. $u_1 = G = r \cdot g$ ist die große Komponente der Wellenfunktion - sie geht im nichtrelativistischen Fall in die Schrödinger - Radialfunktion über.

$u_2 = F = r \cdot f$ ist die kleine Komponente der radialen Wellenfunktion - sie verschwindet im nichtrelativistischen Fall. Die Dirac'sche Quantenzahl κ läßt sich aus dem Gesamtdrehimpuls j und dem Bahndrehimpuls l des Elektrons berechnen.

$$\kappa = 1 \quad \text{für} \quad j = 1 - 1/2$$

$$\kappa = -1-1 \quad \text{für} \quad j = 1 + 1/2 \quad (\text{II.10})$$

$$|\kappa| = j + 1/2$$

Für eine detaillierte Beschreibung des Thomas - Fermi Potentials und der numerischen Berechnung des Energieeigenwertes E aus den zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung (II.9) sei auf Ref. 14 verwiesen. Als Resultat erhielten wir für das $1s$ - Niveau noch Lösungen bis einschließlich $Z = 172^{15)}$. Die unter diesen Bedingungen abgeleiteten Energien für einige niedrig liegenden Elektronenniveaus sind als Funktion der Ordnungszahl Z in Figur 1 aufgetragen. Die radiale Dichteverteilung $|\psi r|^2 = u_1^2 + u_2^2$ des $1s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ und $2s_{1/2}$ Elektrons für $Z = 171$ wird in Figur 2 als Funktion von r

gezeigt. Die jeweils errechneten Bindungsenergien werden angegeben. Für die radialen Erwartungswerte der Wellenfunktionen $\langle r \rangle$ fanden wir

$$\langle r \rangle_{1s} = 118 \text{ fm}, \langle r \rangle_{2p_{1/2}} = 137 \text{ fm} \text{ und } \langle r \rangle_{2s} = 568 \text{ fm}.$$

Als Vergleich ist in Figur 3 die radiale Dichte $|\psi_r|^2$ für die gleichen Elektronen für ${}_{82}\text{Pb}$ dargestellt. Hier liegt das Maximum des 1s - Elektrons etwa bei $r \approx 500 \text{ fm}$ und damit einen Faktor 20 weiter draußen als bei $Z = 171$. Die radiale Dichteverteilung für die Summe aller Elektronen in einem neutralen System mit einer totalen Kernladung $Z = 172$ wird in Figur 4 präsentiert¹⁶⁾. Das stark ausgeprägte Hauptmaximum liegt bei $r \approx 20 \text{ fm}$. Die Schalenstruktur des Atoms ist nur noch schwach zu erkennen. Im Vergleich hierzu läßt sich die radiale Ladungsverteilung in den Atomen ${}_{82}\text{Pb}$ und ${}_{100}\text{Fm}$ aus den Figuren 5 und 6 entnehmen. Die Schalenstruktur ist deutlich zu erkennen, es fehlt jedoch das als relativistischer Effekt dominant ausgeprägte erste Hauptmaximum. Als Beispiel für die Berechnung der Elektronenzustände mit niedrigen Bindungsenergien ist die radiale Ladungsverteilung $|\psi_r|^2$ der beiden äußersten Elektronen - bezogen auf die Quantenzahlen - des Atoms $Z = 172$ in Figur 7 dargestellt. Eine eindeutige Aussage über die Lokalisation dieser Elektronen kann hier nicht mehr aus der Kurve gewonnen werden, sondern muß über die Berechnung der entsprechenden $\langle r \rangle$ Erwartungswerte erfolgen.

Im folgenden Absatz wird das Verhalten des 1s - Elektrons

in der Nähe des kritischen Wertes, bei dem es in den Dirac - See eintaucht, genauer untersucht. Für die Eintauchgeschwindigkeit des $1s$ - Elektrons, definiert als die Änderung des Energieeigenwertes als Funktion von Z bei $Z = Z_{\text{krit}}$, fanden wir

$$v_d = dE(Z=Z_{\text{krit}})/dZ = 30.1 \text{ keV/Ladungseinheit.}$$

Bei einer Variation der äußeren Ladung Z läßt sich für das innerste Elektron und für $Z\alpha > 1$ stets ein kritischer Äquivalentradius des Kernes finden. In Figur 8a wird die relativ starke Abhängigkeit von R_{krit} und Z aufgezeigt. Die Verschiebung des Eintauchpunktes um eine Ladungseinheit wird schon durch eine Änderung des Kernradiuses von nur 10% bewirkt. Da der Äquivalentradius aus der nuklearen Massenzahl A folgt, kann die Energie des K - Elektrons auch als Funktion von A dargestellt werden. Aus Figur 8b läßt sich erkennen, daß die Änderung der Bindungsenergien bei einer Variation von A um 150 Einheiten fast linear erfolgt und etwa 40 keV beträgt. Der Einfluß der Oberflächendicke t der Kernladungsverteilung auf die Bindungsenergie kann der Figur 8c entnommen werden.

Zahlreiche Untersuchungen wurden bezüglich der Frage durchgeführt, ob sich das Eintauchen des $1s$ - Elektrons und weiterer gebundener Elektronen bei entsprechend höherer Kernladung in den Dirac - See verhindern läßt, indem die Bindungsenergie erst asymptotisch für $Z \rightarrow \infty$ den Wert $-2m_e$ erreicht. Phänomenologische Wechselwirkungen,

resultierend zum Beispiel aus Grenzfeldstärke- und Grenzpotentialtheorien, wurden eingeführt, gedacht als Modifikationen der klassischen Elektrodynamik in starken elektromagnetischen Feldern (Elektrische Feldstärke $E \sim 10^{19}$ Volt/cm, Magnetische Feldstärke $H \sim 10^{14}$ Gauß), und ihr Einfluß auf den elektronischen Energieeigenwert studiert. Kopplungskonstanten und freie Parameter wurden stets aus der Forderung der Übereinstimmung innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen zwischen Theorie und Experiment im Bereich der bekannten Elemente bestimmt. In allen untersuchten Fällen erhielten wir als Resultat, daß das 1s - Elektron stets in den Dirac - See eintaucht und daß sich die kritische Ladung Z_{krit} aufgrund dieser modifizierten Wechselwirkungen um maximal nur zwei Einheiten verschieben kann^{15,17-19}). Die letztere Erkenntnis ist besonders hinsichtlich einer experimentellen Verifikation von Bedeutung. Im U - U Stoß ($Z_1 + Z_2 = 184 > Z_{\text{krit}} = 173$) sollten die überkritischen Elektronenzustände damit vermessen werden können. Weiterhin erlaubten die Ergebnisse bezüglich der Grenzfeldstärketheorien (maximale elektrische Feldstärke $> 10^{20}$ Volt/cm) erste Abschätzungen auf den Einfluß der Vakuumpolarisation, das heißt der virtuellen e^+, e^- Paarerzeugung durch die ausgetauschten Photonen, auf die elektronischen Energieeigenwerte. Diese quantenelektrodynamische Korrektur wird im Rahmen einer Reihenentwicklung in den Kopplungskonstanten $\alpha^m (Z\alpha)^n$ $m, n = 1, 2, 3, \dots$ störungstheoretisch berechnet. Für $Z\alpha > 1$

ist eine Konvergenz dieser Reihe nicht mehr trivial gewährleistet und bedarf eines expliziten Beweises. Die höheren Ordnungspotentiale in $\alpha(Z\alpha)^n$ mit $n \geq 3$ der Vakuumpolarisation reduzieren das äußere Feld. Dies ist äquivalent zu einer effektiven Wechselwirkung durch Einführung einer maximalen elektrischen Feldstärke. Da die Grenzfeldstärketheorien den Eintauchpunkt des 1s - Elektrons nur um maximal eine Einheit in Z verschieben konnten, sollte auch der Einfluß der Vakuumpolarisation auf den Energieeigenwert weniger als 30 keV betragen. Der dominante Anteil der Vakuumpolarisation ist durch das Uehling - Potential der Ordnung $\alpha(Z\alpha)$ gegeben

$$V_{VP}(r') = - \alpha \frac{4\alpha}{3} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \rho(r') \{Z_1(|r-r'|) - Z_1(|r+r'|)\} dr \quad (II.11)$$

mit der Strukturfunktion

$$Z_1(|r|) = \int_1^{\infty} \exp(-2|r|\xi) (1 + 0.5 \xi^{-2}) (\xi^2 - 1)^{1/2} \xi^{-3} d\xi \quad (II.12)$$

$\rho(r')$ ist die Kernladungsdichte.

Das Potential (II.9) wurde durch numerische Doppelintegration berechnet und zum Coulombpotential, das bereits durch den ausgedehnten Kern und durch die Thomas - Fermi Wechselwirkung modifiziert ist, in der Diracgleichung (II.9) hinzuaddiert. Für den Energieeigenwert des 1s - Elektrons in $Z = 171$ fanden wir eine Verschiebung von

$\Delta E_{VP} = -11.834 \text{ keV}^{15)}$, diese Korrektur von 1% kann damit vernachlässigt werden. Auch höhere Ordnungseffekte bis zu $\alpha(Z\alpha)^7$ und $\alpha^2(Z\alpha)$ konnten berücksichtigt werden, indem wir Potentiale verwendeten, die von Blomquist²⁰⁾ zur Berechnung der Strahlungskorrekturen im myonischen Blei abgeleitet wurden. Wir fanden $\Delta E_{VP} = 870 \text{ eV}, 582 \text{ eV}, 458 \text{ eV}$ und 74 eV entsprechend den Ordnungen $\alpha(Z\alpha)^3$, $\alpha(Z\alpha)^5$, $\alpha(Z\alpha)^7$ beziehungsweise $\alpha^2(Z\alpha)$ (Ref.21). Die geradzahligen Ordnungen in $\alpha(Z\alpha)^n$ verschwinden nach dem Furry'schen Theorem, da sie die Ladungsinvarianz verletzen. Dieser resultierende Effekt ist somit noch einmal eine Größenordnung kleiner als der des Uehling - Potentials. Exakte Rechnungen in allen Ordnungen Vakuumpolarisation $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha(Z\alpha)^n$, jedoch ohne Berücksichtigung des dominanten Uehling Anteils wurden von Gyulassy²²⁾ sowie von Rinker und Wilets²³⁾ durchgeführt. Das Resultat von $\Delta E_{VP} \approx 1 \text{ keV}$ beweist die Konvergenz der Störungsentwicklung und bestätigt unsere Abschätzung.

Im Fermium, das bisher schwerste, mit hoher Genauigkeit vermessene Element, ist der Hauptanteil der Strahlungskorrektur jedoch durch die Selbstenergie des Elektrons gegeben. Hier gilt für die totale Bindungsenergie des $1s$ - Elektrons $E_B = -141.965 \text{ KeV}^{4)}$, während die QED - Effekte $\Delta E_{VP} = -154 \text{ eV}$ und $\Delta E_{SE} = 484 \text{ eV}$ betragen. Die Verschiebungen aufgrund der Selbstenergie können wiederum störungstheoretisch in einer Reihenentwicklung mittels einer Formel von Erickson²⁴⁾ bestimmt werden. Für das $1s$ - Elektron in

$Z = 173$ erhielten wir $\Delta E_{SE} = 2.9$ keV. Exaktere Rechnungen wurden in Ref. 25 durchgeführt. Als Resultat ergab sich $\Delta E_{SE} \approx 11$ keV. Da die quantenelektrodynamischen Korrekturen selbst in den starken elektrischen Feldern bei $Z \sim Z_{krit}$ vernachlässigbar sind, erscheinen auch genauere Berechnungen zum Hartree - Fock Ansatz der Quantenelektrodynamik²⁶⁻²⁸⁾ nicht mehr notwendig.

Noch präzisere Aussagen bezüglich der Elektron - Elektron Wechselwirkung werden im Rahmen des relativistischen Hartree - Fock - Slater Modells (HFS) ermöglicht. Hier gibt es drei Hauptmotivationen, die die Durchführung der entsprechenden Rechnungen begründen:

- 1) Wenn in der Natur stabile, superschwere Elemente existieren oder im Labor zahlreiche dieser Atome künstlich erzeugt werden können, so erfolgt ihre Identifikation über die charakteristische Röntgenstrahlung und dem Vergleich mit den theoretischen HFS - Daten. Die chemischen und physikalischen Eigenschaften der superschweren Elemente werden durch die HFS - Rechnungen vorausbestimmt.
- 2) Im Schwerionenstoß können sich auch schwere Kerne soweit annähern, daß sich kurzzeitig ein superschweres Quasiatom bilden kann und die Elektronen sich in einem Feld der Zentralladung $Z_1 + Z_2$ bewegen. Die Ausbildung eines derartigen Quasiatoms kann durch den Vergleich der bei Übergängen emittierten Strahlung mit den HFS - Rechnungen

bewiesen werden.

3) Im Schwerionenstoß werden Energien und Quantenzahlen der Elektronen als Funktion des Zwei - Zentren Abstandes R in Korrelationsdiagrammen aufgetragen. Bei der Konstruktion dieser Diagramme müssen zunächst die Niveaus bei $R \rightarrow \infty$ und $R = 0$ durch die HFS - Rechnungen festgelegt werden.

Der Hamilton - Operator zur Beschreibung des Atoms ist bei diesem selbstkonsistenten Problem gegeben durch^{29,30)}

$$H = \sum_i T_i - \sum_i V_{\text{nuc}}(\vec{r}_i) + \sum_{i < j} \alpha / (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)^{-1} = H_0 + H_{\text{int}}$$

(II.13)

$$T = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m_e$$

Nach Variation der Total - Energie erhält man die Hartree - Fock Gleichung ($\alpha = e^2/\hbar c$)

$$\begin{aligned} T_i \psi_i(\vec{r}) - V_{\text{nuc}}(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}) + \left\{ \sum_{\kappa} \int \psi_{\kappa}^*(\vec{r}') \psi_{\kappa}(\vec{r}') \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \right\} \psi_i(\vec{r}) \\ - \left\{ \sum_{\kappa} \int \frac{\psi_i^*(\vec{r}) \psi_{\kappa}^*(\vec{r}') \psi_{\kappa}(\vec{r}) \psi_i(\vec{r}')}{\psi_i^*(\vec{r}) \psi_i(\vec{r})} \frac{\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \right\} \psi_i(\vec{r}) \\ = E_i \psi_i(\vec{r}) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Die totale Energie ergibt sich nach

$$E_T = \sum_i \int \psi_i^*(\vec{r}) H_0 \psi_i(\vec{r}) d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i,\kappa} \left(\int d\tau d\tau' \psi_i^*(\vec{r}) \psi_\kappa^*(\vec{r}') \frac{\alpha}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \{ \psi_i(\vec{r}) \psi_\kappa(\vec{r}') - \psi_i(\vec{r}') \psi_\kappa(\vec{r}) \} \right) \quad (\text{II.15})$$

Für konkrete Rechnungen müssen zwei Näherungen gemacht werden. Die Elektronendichte wurde als sphärisch symmetrisch angenommen, so daß der Direktterm in Gleichung (II.14) geschrieben werden kann als

$$V_{\text{dir}} = \sum_\kappa \int \psi_\kappa^*(\vec{r}') \psi_\kappa(\vec{r}') \frac{\alpha}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\tau' = \int \rho(\vec{r}') \frac{\alpha}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\tau' = 4\pi\alpha \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' + \int_r^\infty r' \rho(r') dr' \right\} \quad (\text{II.16})$$

Der nichtlokale Austauschterm in (II.14) wurde durch den lokalen Slater - Ansatz ersetzt

$$V_{\text{exch}}(r) = - 3s/(2\pi) \{ 3\pi^2 \rho(r) \}^{1/3} \quad (\text{II.17})$$

Für den Slater - Koeffizienten s haben wir stets $s = 2/3$ verwendet. Weiterhin wurde die Latter - Korrektur eingeführt, die für sehr große Radien für das totale Potential ein $1/r$ Verhalten annimmt, sobald dieser funktionale Verlauf numerisch erreicht wird.

Die radiale Wellenfunktion eines Elektrons läßt sich aus der Lösung der Differentialgleichung (II.9) ermitteln.

Abschließend wird der Energieeigenwert eines Elektrons durch iteratives Lösen der Hartree - Fock - Slater Gleichung gefunden. Als Selbstkonsistenz - Kriterium sollte in dem verwendeten Computerprogramm³⁰⁾ das Potential, generiert aus der Elektronendichte, für alle Punkte von r die folgende Bedingung erfüllen

$$|(V_{\text{alt}} - V_{\text{neu}})/V_{\text{alt}}| < \delta = 10^{-6} \quad (\text{II.18})$$

Als Resultat erhielten wir für die kritische Ladung des 1s - Elektrons $Z = 173$ mit $E_B = - 1006.175$ keV und eine Maximalamplitude der elektronischen Ladungsverteilung $|\Psi r|_{1s}^2$ bei $r = 23.5$ fm. Ein Vergleich der Bindungsenergien in den ersten drei Schalen beim Edelgas $Z = 172$ ($A = 504$, $c = 9.243$ fm, $t = 2.2$ fm) zwischen dem Hartree - Fock - Slater - und dem Thomas - Fermi - Modell zeigt, daß das statistische Modell (TF) zwischen 4 und 15% zu hohe Werte lieferte und damit den Einfluß der Elektron - Elektron Wechselwirkung deutlich unterschätzt.

Die Ein - Elektronennäherung liefert hier nur für das 1s - Elektron befriedigende Resultate. Die Abweichungen zu den HFS - Ergebnissen betragen etwa 10% bei $Z \sim 170$ und 20% bei $Z \sim 100$. Jedoch schon in der L - Schale können Differenzen bis zu 100% auftreten. Besonders gravierend sind die Unterschiede für die Zustände mit sehr hohen Quantenzahlen. Das der Bindungsenergie nach äußerste Elektron im Atom $Z = 173$ ist im $6g_{7/2}$ - Zustand mit $E_B = - 0.5$ eV,

während aus der Sommerfeld'schen Feinstrukturformel

$$E_B = - 11 \text{ keV folgt.}$$

Da sich diese Systeme wahrscheinlich nur kurzzeitig im Schwerionenstoß realisieren lassen und damit nicht im neutralen Zustand erzeugt werden können, haben wir auch den Einfluß des Ionisationsgrades auf den Energieeigenwert des $1s$ - Elektrons studiert. In Figur 9 ist für $Z = 170$ die Energieverschiebung ΔE_{1s} in keV als Funktion des Ionisationsgrades aufgetragen. Erst für $d > 150$ erreicht ΔE_{1s} den 10 keV - Bereich und bildet damit eine 1% Korrektur zum Energieeigenwert. Derart hohe Ionisationsgrade sind experimentell momentan jedoch nicht erreichbar. Auch für bekannte Elemente ($Z = 70$) fanden wir eine sehr schwache Abhängigkeit der $1s$ - Energie von der Ionisation in ³¹⁾ äußeren Schalen .

Ein Loch in der K - Schale bei $Z = 172$ erhöht den Betrag der Bindungsenergie des verbliebenen $1s$ - Elektrons um $\Delta E = 13.666 \text{ keV}$.

Wir haben für alle neutralen Atome zwischen $Z = 47$ (Ag) und $Z = 173$ relativistische HFS - Rechnungen durchgeführt. Für $Z \geq 100$ sind die Bindungsenergien $E_B = E - m_e$ im Bereich zwischen -1 keV und -1MeV als Funktion der Ordnungszahl Z in Figur 10 dargestellt^{32,33)}. Besonders auffällig ist die als relativistischer Effekt stark ausgeprägte Bindung der $p_{1/2}$ und s - Elektronen, die für die zahlreichen Kreuzungen der Elektronenzustände verantwortlich ist. Es muß bemerkt werden, daß hier Bindungsenergie nicht als

die Differenz der totalen Energie des neutralen Atoms und des entsprechend ionisierten Atoms verstanden wird. Für die äußersten Elektronen, die die chemischen Eigenschaften des Systems festlegen, ist die Bindungsenergie im Bereich zwischen - 45 eV und Null als Funktion von Z in Figur 11 aufgetragen.

Die Kurve in Figur 12 kennzeichnet die totale Energie E_T in MeV der Atome als Funktion von Z im Bereich $47 \leq Z \leq 173$. Diese Kurve erlaubt eine Aussage über den Energiegewinn im Schwerionenstoß durch die Elektronenwolke. Bildet sich zum Beispiel im Stoß von Hg mit Th das superschwere Quasiatom $Z = 170$, so erhält man

$$E_T(170) - E_T(90) - E_T(80) = (5.878 - 0.721 - 0.534) \text{ MeV} = 4.623 \text{ MeV}$$

Diese Energie addiert sich zur kinetischen Ionenenergie von etwa 700 MeV an der Coulombbarriere und ändert damit auch den Rutherford Streuquerschnitt in der Größenordnung von 1%^{16,21,34,35}).

Die experimentelle Verifikation des Eintauchens der 1s - Elektronen in den Dirac - See wird im U - U Stoß erfolgen. Da sich die Elektronen hier im Feld von zwei Ladungszentren bewegen, ergibt sich bei festgehaltenem Abstand R der Kerne die Bindungsenergie aus der Lösung der Zwei - Zentren Diracgleichung^{36,37}). Für einige niedrig liegende Niveaus

kann die Bindungsenergie - berechnet in der Ein - Elektronen Näherung unter Berücksichtigung des ausgedehnten Kernes - als Funktion von R aus Figur 13 entnommen werden. Das 1s - Niveau (durchgezogene Kurve) taucht hiernach bei einem kritischen Abstand von $R_{\text{krit}} = 34 \text{ fm}$ in den See von Elektronen negativer Energie ein. In den asymptotischen Bereichen der Zwei - Zentren Diagramme lassen sich die HFS - Energien und damit die Differenz Δ zum Ein - Elektronen Resultat $E(R)$ ermitteln. Verschiebt man nun die 1s - Kurve linear bezüglich der Bindungsenergie $E(R)$ resultierend aus den HFS - Korrekturen, so erhält man eine relativ gute Abschätzung für die adiabatischen, relativistischen Zwei - Zentren HFS Energien¹⁶⁾.

$$E_{\text{HFS}}(R) = E(R) + \frac{\Delta(R_2) - \Delta(R_1)}{E(R_2) - E(R_1)} (E(R) - E(R_1)) + \Delta(R_1)$$

(II.19)

$$\Delta(R_i) = E_{\text{HFS}}(R_i) - E(R_i)$$

Für die Fixpunkte R_i wählt man gewöhnlich $R_1 = \infty$ und $R_2 = 0$. Die strichpunktierten Kurven in Figur 13 zeigen diese HFS - Abschätzung für das 1s und das $2p_{1/2}$ - Niveau. Der kritische Zwei - Zentren Abstand verschiebt sich hiernach auf $R_{\text{krit}} = 27 \text{ fm}$. Das $2p_{1/2}$ - Niveau taucht selbst bei $Z = 184$ und auch ohne elektronische Abschirmung noch nicht in den Dirac - See ein. Es muß betont werden, daß in diesen Rechnungen stets volle Adiabasie angenommen wurde.

Nochmals zusammengefaßt folgt: $Z_{\text{krit}} = 173$ und $R_{\text{krit}} = 27 \text{ fm}$ für das 1s - Niveau im U - U Stoß.

Abschließend in diesem Unterkapitel soll die Frage untersucht werden, ob sich auch für Pionen und Myonen im Coulombfeld der Kerne ähnlich kritische Werte ermitteln lassen.

Setzt man den Kernradius konstant $R = 10 \text{ fm}$, so ermöglicht dies einfache Abschätzungen für den Eintauchpunkt von Pionen und Myonen.

Nach dem Virialsatz folgt

$$\langle T \rangle = - 0.5 \langle \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V \rangle \quad (\text{II.20})$$

Approximativ kann angenommen werden

$$\langle T \rangle \approx E_B \approx - 0.5 V_{\text{max}} \text{ mit } V_{\text{max}} = - Z\alpha/R_{\text{Kern}} \quad (\text{II.21})$$

Um Z_{krit} zu berechnen setzt man

$$E_B = 2 \cdot m_\mu = 2 \cdot 105.6599 \text{ MeV} \quad (\text{II.22})$$

und analog für die kritische Ladung bezüglich der Pionen.

Hieraus folgt schließlich für Myonen $Z_{\text{krit}}^\mu = 2935$

und für Pionen $Z_{\text{krit}}^\pi = 3750$.

In jedem Fall muß aber gelten

$$|E_B| \leq |V_{\text{max}}| \quad (\text{II.23})$$

Dies ergibt $Z_{\text{krit}}^\pi \geq 1875$.

Die Annahme, daß sich die Teilchen nur innerhalb des Atomkerns bewegen, wobei weiterhin jedoch nur die elektromagnetische Wechselwirkung berücksichtigt wird, erlaubt noch sehr viel genauere Abschätzungen für Z_{krit} ³⁸⁾.

Innerhalb des Atomkerns gilt

$$V = \frac{3Z\alpha}{2R} + \frac{Z\alpha r^2}{2R^3} = V_0 + 0.5m\omega^2 r^2 \quad (\text{II.24})$$

Hieraus folgt für die Energie des niedrigsten Zustandes beim Eintauchen

$$E = -m = V_0 + 0.5 \omega + m \quad (\text{II.25})$$

Für $A = 2.5 \cdot Z$ und $R = 1.2 \cdot A^{1/3} = r_0 \cdot A^{1/3}$ resultiert mit $R^3 = Z \cdot r_0'^3$ und $r_0' = 2.5^{1/3} \cdot r_0 = 1.67 \text{ fm}$

$$Z_{\text{krit}} = \left\{ (4mr_0' + (mr_0'/\alpha)^{-1/2}) \frac{1}{3\alpha} \right\}^{3/2} \quad (\text{II.26})$$

Setzt man hier die entsprechenden Teilchenmassen ein, so finden wir

$$Z_{\text{krit}}^{\mu} = 2091 \quad \text{und} \quad Z_{\text{krit}}^{\pi} = 3133$$

Durch numerisches Lösen der Diracgleichung¹⁵⁾ unter Verwendung einer Fermi - Kernladungsverteilung mit $A = 2.5 \cdot Z$, $R_{\text{eq}} = 1.2 \cdot A^{1/3}$ und $t = 2.2 \text{ fm}$ ergab sich

$$Z_{\text{krit}}^{\mu} = 2200$$

und durch numerisches Lösen der Klein - Gordon Gleichung³⁹⁾

$$Z_{\text{krit}}^{\pi} = 3300$$

Diese utopischen Werte liegen außerhalb eines experimentell relevanten Bereiches.

b) Übergangsraten von Elektronen

Einführung

Die Kenntnis der theoretischen Übergangsrate von Elektronen ist notwendig für die experimentelle Identifikation von superschweren Elementen durch ihre charakteristische Röntgenstrahlung. Der mögliche Nachweis⁴⁰⁾ der Elemente $Z = 116$ oder 127 , sowie 124 und 126 basiert auf Proton - induzierter Röntgen - Spektroskopie, wobei das $2p_{3/2}$ - Niveau als Endzustand betrachtet wird. Es gibt zahlreiche Übergänge in verschiedenen Elementen, die für die gemessenen Energien verantwortlich sein können, die man jedoch ausschließen kann, weil sie entweder eine zu niedrige Übergangsrate haben oder weil andere dominante Übergänge im selben Energiebereich nicht auftreten^{41,42)}.

Die quasimolekulare Röntgenspektroskopie im Schwerionenstoß erlaubt sogar die Untersuchung von Systemen mit einer totalen Kernladung von $Z = 184$ ($U + U$). Übergänge in die M - Schale für Systeme bis zu $Z = 145$ ($I + U$) wurden bereits durch viele Gruppen beobachtet^{43,44)}. Die Identifikation der gemessenen Übergänge resultiert aus einer guten Übereinstimmung mit relativistischen Hartree - Fock - Slater (HFS) Rechnungen^{32,33)}.

Für eine theoretische Erklärung der quasimolekularen Spektren in starken elektromagnetischen Feldern ($Z\alpha > 1$) ist die Berechnung der elektronischen Übergangsraten notwendig, um alle dominanten Übergangsmöglichkeiten zu erfassen. Daher haben wir unter Verwendung des relativistischen

HFS - Modells und dem Formalismus von Scofield⁴⁵⁾ folgend die elektronischen Übergangsraten berechnet für die superschweren Elemente $Z = 114$ und 164 , wo man Inseln stabiler Elemente erwartet^{46,47)}, das Element $Z = 126$, die quasimolekularen Systeme mit $Z = 134$ und 145 und das Element $Z = 173$. Die Bindungsenergie des $1s$ - Elektrons bei $Z = 173$ beträgt $E_{1s} = 1006.175$ keV. Bei Erhöhung der Kernladung um eine Einheit würde das $1s$ - Elektron in den Dirac - See eintauchen und kann nicht mehr mit dem verwendeten Computer Programm^{29,30)} berechnet werden. Als Endzustände betrachten wir K-, L-, und M-Schale und als Anfangszustände werden alle Elektronen bis zum $4f_{7/2}$ - Niveau in Rechnung gestellt.

Theoretische Beschreibung

In erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie ist die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit von gebundenen Elektronen durch Fermi's Goldene Regel gegeben

$$\Gamma = 2\pi \sum |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2 \rho(E_f) \quad (II.27)$$

wobei $\sum$ die Mittelung über die Anfangszustände und Summation über die Endzustände angibt. In diesem Kapitel verwenden wir natürliche Einheiten ($\hbar = c = m_e = 1$). Die Wechselwirkung ist bestimmt durch

$$H_{int} = \vec{j} \cdot \vec{A} \quad (II.28)$$

mit $j = \vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}$ kennzeichnet die Dirac Matrizen.

Das $\vec{A}$ - Feld wird nach elektrischen und magnetischen Multipolen zerlegt. Damit folgt^{45,48)}

$$\Gamma_{if} = 4\pi^2 \alpha \omega \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{M=-L}^L \{ |\langle f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A}_{LM}(m) | i \rangle|^2 + |\langle f | \vec{\alpha} \cdot \vec{A}_{LM}(e) | i \rangle|^2 \} \quad (\text{II.29})$$

mit

$$\vec{A}_{LM}(m) = i (2/\pi)^{1/2} j_L(\omega r) \{L(L+1)\}^{-1/2} \vec{L} Y_{LM}(\hat{r}) \quad (\text{II.30})$$

$$\vec{A}_{LM}(e) = (2/\pi)^{1/2} \omega \{L(L+1)\}^{-1/2} \vec{\nabla} \times \{ \vec{L} j_L(\omega r) Y_{LM}(\hat{r}) \} \quad (\text{II.31})$$

und

$$\vec{L} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla}$$

$$\hat{r} = \vec{r}/r$$

Abschließend erhält man für die totale Übergangsrate zwischen Einteilchen - Elektronenzuständen in sphärisch symmetrischen Potentialen^{45,49,50)}

$$\Gamma_{if} = 2\pi \omega^2 \sum_L L \{ \Gamma_L(m) + \Gamma_L(e) \} \quad (\text{II.32})$$

$$\Gamma_L(m) = (2j_i+1)/\omega B(-\kappa_i, \kappa_f, L) R_L^2(m) \quad (\text{II.33})$$

$$\Gamma_L(e) = (2j_i+1)/\omega B(\kappa_i, \kappa_f, L) R_L^2(e) \quad (\text{II.34})$$

$$B(\kappa_i, \kappa_f, L) = \frac{(2l_i+1)(2l_f+1)}{L(L+1)} C^2(l_i, l_f, L; 00) W^2(j_i, l_i, j_f, l_f; \frac{1}{2}L) \quad (\text{II.35})$$

Zwischen den Drehimpulsquantenzahlen j_l und κ bestehen die Beziehungen (II.10). Das Argument $-\kappa_i$ in der Funktion B von (II.35) erfordert auch eine Neudefinition von l_i entsprechend den Gleichungen (II.10).

Mit $J = L + l_i + l_f$ lassen sich der Clebsch - Gordon - und der Racah Koeffizient in (II.35) schreiben als

$$C^2(l_i, l_f, L; 00) = \frac{(2L+1)(J-2L)!(J-2l_i)!(J-2l_f)!}{(J+1)!} \cdot \left\{ \frac{(J/2)!}{(J/2-L)!(J/2-l_i)!(J/2-l_f)!} \right\}^2 \quad (\text{II.36})$$

$$W^2(j_i l_i j_f l_f; \frac{1}{2}L) = \left| \frac{(L+\kappa_i+\kappa_f+1)(\kappa_i+\kappa_f-L)}{4\kappa_i\kappa_f(2\kappa_i+1)(2\kappa_f+1)} \right| \quad (\text{II.37})$$

Die radialen Matrixelemente $R_L(m)$ und $R_L(e)$ sind gegeben durch

$$R_L(m) = (\kappa_i+\kappa_f) \int dr j_L(\omega r) (F_f G_i + G_f F_i) \quad (\text{II.38})$$

$$R_L(e) = \int dr \{ j_{L-1}(\omega r) ((\kappa_f-\kappa_i)(F_f G_i + G_f F_i) + L(F_f G_i - G_f F_i)) + L(G_i G_f + F_i F_f) j_L(\omega r) \} \quad (\text{II.39})$$

Die sphärischen Besselfunktionen j_L und die radialen Matrixelemente werden numerisch berechnet unter Verwendung von Hartree - Fock - Slater Wellenfunktionen für die große

und kleine radiale Komponente $G = r \cdot g$ und $F = r \cdot f$. Der statistische Faktor $2j_i + 1 = 2|\kappa_i|$ in den Gleichungen (II.33) und (II.34) gibt die Besetzungszahl der Elektronen im Anfangszustand an.

Numerische Resultate

Für $Z = 112$ haben wir unsere Übergangsraten mit den Resultaten von Anholt und Rasmussen⁵⁰⁾ verglichen und fanden im allgemeinen eine Übereinstimmung innerhalb eines Fehlers von 1%. Die Rate für den $2p_{3/2} - 1s$ Übergang bleibt innerhalb eines Faktors 2 gleich zwischen $Z = 114$ und $Z = 164$ und kann daher nicht durch ein einfaches Skalierungsgesetz aus den Elementen mit $Z < 105$ erhalten werden. Als rein relativistischer Effekt wächst die Rate für den $2s - 1s$ Übergang der Multipolarität M1 sehr stark an und liefert den dominanten Anteil bei der Auffüllung der K - Schale für $Z = 173$, wo wir $\Gamma(2s-1s) = 226$ eV haben verglichen mit $\Gamma(2p_{3/2}-1s) = 127$ eV. Berücksichtigen wir das $2p_{3/2}$, $2p_{1/2}$, $3p_{3/2}$ und das $2s$ - Niveau als Anfangszustand, so finden wir als totale Übergangsrate zum $1s$ - Zustand $\Gamma = 433.1$ eV. Dies kann sehr wichtig werden bei einer zukünftigen Spektroskopie der superschweren Quasimoleküle⁵¹⁾, da es die Photonenrate deutlich erhöht und auch die Form des Spektrums modifiziert. Unter Verwendung von $\tau = \hbar/\Gamma$ und $\hbar = 6.582183 \cdot 10^{-16}$ eVsec kann die entsprechende Übergangszeit leicht berechnet werden. $\tau_{1s} = 1.5 \cdot 10^{-18}$ sec. Zum Vergleich die elementare Zeiteinheit $\hbar/m_e = 1.288 \cdot 10^{-21}$ sec. Im U - U Stoß bei $E_{CM} = 800$ MeV und Stoßparameter $b = 0$

vergehen die folgenden Zeiträume $\tau(R_s)$ von einem Zwei -
Zentren Abstand R_s bis zur minimalen Annäherung $R_{\min} = 15 \text{ fm}$
und wieder bis zu dem festen Abstand R_s

$$\tau(R_{\text{krit}}=36\text{fm}) = 2.37 \cdot 10^{-21} \text{ sec}$$

$$\tau(500\text{fm}) = 2.96 \cdot 10^{-20} \text{ sec}$$

$$\tau(25300\text{fm}) = \tau_{1s}$$

Für $Z = 173$ wurde die höchste Rate gefunden für den

$2p_{3/2} - 2s$ Übergang mit $\Gamma = 269 \text{ eV}$, der selbst verglichen
mit den K_α - Übergängen dominiert. Das Verhältnis

$\Gamma(2p_{3/2}-2s;E1,M2) / \Gamma(2p_{3/2}-2p_{1/2};E2,M1)$ verringert sich
von 179 bei $Z = 114$ zu 15.7 bei $Z = 173$, wobei der Absolutwert
für den zweiten Übergang um einen Faktor 2000 anwächst.

Wenn wir unsere Diskussion auf diese beiden Elemente
beschränken, lassen sich weitere qualitativ neue Aspekte
aufzeigen. Γ erniedrigt sich um einen Faktor 2 für den
 $2p_{1/2} - 1s$ Übergang (E1) bei anwachsendem Z , während der
E1 - Übergang $2p_{3/2} - 1s$ unverändert bleibt und nur der
M2 - Anteil ansteigt. Äquivalent resultiert für den

$3p_{3/2} - 1s$ Übergang $\Gamma(E1) / \Gamma(M2) \sim 3$ für die höchste
betrachtete Kernladung. Bezüglich des $3p_{3/2} - 2p_{1/2}$ Übergangs
fanden wir $\Gamma(E2) = 1.62 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$ und $\Gamma(M1) = 4.38 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$

für $Z = 114$ und umgekehrt $\Gamma(E2) = 1.9 \text{ eV}$ und $\Gamma(M1) = 3.36 \text{ eV}$

für $Z = 173$. Eine noch stärkere Änderung der Bedeutung
der magnetischen Multipole kann für den $3d_{5/2} - 1s$ Übergang
aufgezeigt werden, wo wir für $Z = 173$ $\Gamma(M3) / \Gamma(E2) = 1.5$
berechnet haben.

Unsere numerischen Resultate⁵²⁾ sind dargelegt in Tabelle 1
für $Z = 114$ und 126, in Tabelle 2 für $Z = 134$ und 145,

in Tabelle 3 für $Z = 164$ und 173 und in Tabelle 4 für $Z = 112$ und 158 . Auf der Ordinate haben wir den Anfangszustand bis zum $4f_{7/2}$ - Niveau und auf der Abszisse den Endzustand bis zum $3d_{5/2}$ - Niveau aufgetragen. Die Striche bedeuten, daß entweder der betreffende Übergang energetisch nicht erlaubt oder daß er nicht betrachtet wurde, weil er zu klein ist. Tabelle 5 zeigt die berücksichtigten Multipolaritäten. In den Tabellen 6 und 7 geben wir die radialen Erwartungswerte $\langle R \rangle$ und $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ in fermi für die selben Elemente bis zum $4f_{7/2}$ - Zustand an. Der $\langle R \rangle$ Erwartungswert für die K - Schale variiert von 502.7 fm bei $Z = 114$ bis zu 115.3 fm bei der fast kritischen Ladung $Z = 173$.

c) Das Kontinuum in starken elektrischen Feldern

Für $E > m_e$ und $E < -m_e$ folgen aus den Gleichungen (II.9) die Kontinuumslösungen der Diracgleichung, die wir auf δ - Funktionen in der Energie normieren.

$$\int_0^{\infty} (u_{1E} u_{1E'} + u_{2E} u_{2E'}) dr = \delta(E - E') \quad (\text{II.40})$$

Die Integration der beiden gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung wird numerisch mit Hilfe von Hamming's Modified - Predictor - Corrector Methode⁵³⁾ durchgeführt. Dieses Verfahren generiert die Wellenfunktionen an allen Punkten r aus vier Startwerten für u_1 und u_2 an äquidistanten Punkten am Ursprung, die jedoch sehr genau bekannt sein sollten. Für das abgeschnittene Coulombpotential

$$\begin{aligned} V(r) &= -V_0 = -Z\alpha/R_{eq} \quad \text{für } r \leq R_{eq} \\ V(r) &= -Z\alpha/r \quad \text{für } r \geq R_{eq} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

lassen sich die regulären Lösungen der Radialgleichungen (II.9) analytisch angeben. Mit $S_\kappa = \kappa/|\kappa|$ und $p^2 = (E+V_0)^2 - m_e^2$ folgt für $r \leq R_{eq}$

$$u_1 = a_0 r j_1(pr) \quad (\text{II.42})$$

$$u_2 = a_0 S_\kappa \frac{pr}{E + V_0 + m_e} j_{\bar{1}}(pr) \quad (\text{II.43})$$

$$\bar{1} = 1 - S_\kappa \quad (\text{II.44})$$

Die Beziehungen (II.42) und (II.43) gelten trivialerweise auch für $V_0 = 0$ und bilden damit die Lösungen der

Diracgleichung für freie Teilchen. Hier ist u_1 für positive Energie und positives κ identisch mit u_2 für negative Energie und negatives κ und umgekehrt. Diese Identität, die das Verschwinden der Vakuum polarisation im feldfreien Fall widerspiegelt, läßt sich auch leicht aus den Differentialgleichungen (II.9) erkennen. Allgemeiner gilt für die radialen Wellenfunktionen $u_1(E, \kappa)$

$$u_1(E - V_0, \kappa) = u_2(-E + V_0, -\kappa) \quad (\text{II.45})$$

$$u_2(E + V_0, \kappa) = u_1(-E - V_0, -\kappa) \quad (\text{II.46})$$

Information geht dagegen verloren, wenn man das Gleichungssystem (II.9) entkoppelt durch Transformation auf eine Gleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{dV/dr}{E - V + m_e} \frac{du_1}{dr} + \left\{ (E - V)^2 - m_e^2 - \frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2} + \frac{\kappa}{r} \frac{dV/dr}{E - V + m_e} \right\} u_1 = 0 \quad (\text{II.47})$$

Für $V = 0$ sind hier Lösungen zu positiver und negativer Energie identisch.

Mit Hilfe der Rekursionsbeziehung

$$j_{n-1}(z) + j_{n+1}(z) = \frac{(2n+1)}{z} j_n(z) \quad (\text{II.48})$$

und

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (\text{II.49})$$

$$j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} \quad (\text{II.50})$$

lassen sich die sphärischen Besselfunktionen für kleine z leicht berechnen.

Auch für das harmonische Oszillatorpotential (II.4) können die Lösungen für u_1 und u_2 in Form einer Reihe¹³⁾ angegeben werden. Für $\kappa = k = |\kappa|$ gilt

$$u_1 = (r/R_{eq})^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r/R_{eq})^{2n} \quad (\text{II.51})$$

$$u_2 = (r/R_{eq})^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n (r/R_{eq})^{2n} \quad (\text{II.52})$$

a_n und b_n folgen aus dem Koeffizientenvergleich, wenn man den Ansatz (II.51) und (II.52) in das Gleichungssystem (II.9) einsetzt

$$b_0 = \frac{(2k+1) a_0}{R_{eq}(E+m_e)+3/2Z\alpha} \quad (\text{II.53})$$

$$b_1 = - (R_{eq}(E-m_e)+3/2Z\alpha) a_0 / 2. \quad (\text{II.54})$$

$$a_1 = (\{R_{eq}(E+m_e)+3/2Z\alpha\} b_1 - Z\alpha/2 b_0) / (2k+3) \quad (\text{II.55})$$

Für $n > 1$ gilt

$$(2k+2n+1) a_n = \{R_{eq}(E+m_e)+3/2Z\alpha\} b_n - Z\alpha/2 b_{n-1} \quad (\text{II.56})$$

$$2(n+1) b_{n+1} = -\{R_{eq}(E-m_e)+3/2Z\alpha\} a_n + Z\alpha/2 a_{n-1} \quad (\text{II.57})$$

Für $\kappa = -k$ muß u_1 und u_2 vertauscht und das Vorzeichen von E und Z umgedreht werden.

Bis auf die Normierungskonstante a_0 in (II.53), (II.42) und (II.43) sind damit die Dirac'schen Radialfunktionen innerhalb des Atomkerns eindeutig bestimmt. Die numerische Genauigkeit betrug hierbei $\delta < 10^{-8}$.

Zwei verschiedene Verfahren wurden angewendet, um die Normierungskonstante a_0 zu berechnen.

1) Die Kontinuumswellenfunktionen können in analytischer Form dargestellt werden⁵⁴⁾. Ein Vergleich dieser analytischen Wellenfunktionen mit den Werten, erhalten mit Hilfe des numerischen Integrationsverfahren HPCM⁵³⁾, an einem Punkt r_0 bestimmt eindeutig a_0 . Eine explizite Berechnung der analytischen Wellenfunktionen an allen Punkten r ist jedoch aus Rechenzeit - und Genauigkeitsgründen für große Argumente $2pr$ unzumutbar.

2) Die asymptotischen Lösungen für $r \rightarrow \infty$ der Radialgleichungen (II.9) lauten^{55,56)}

$$u_1 = F1 \cos (pr + y \cdot \ln(2pr) + \Delta) \quad (\text{II.58})$$

$$u_2 = F2 \sin (pr + y \cdot \ln(2pr) + \Delta) \quad (\text{II.59})$$

mit $p^2 = E^2 - m_e^2$ und

$$F1 = (E + m_e)^{1/2} (\pi p)^{-1/2} \quad \text{für } E > m_e \quad (\text{II.60})$$

$$F1 = (-E - m_e)^{1/2} (\pi p)^{-1/2} \quad \text{für } E < -m_e$$

$$F_2 = -(E - m_e)^{1/2} (\pi p)^{-1/2} \quad \text{für } E > m_e \quad (\text{II.61})$$

$$F_2 = (-E + m_e)^{1/2} (\pi p)^{-1/2} \quad \text{für } E < -m_e$$

Δ ist die Coulomb - Phasenverschiebung.

Mit Hilfe der unnormierten, bis in den asymptotischen Bereich numerisch berechneten Wellenfunktionen $u_{i,\text{num}}$ ergibt sich für a_0

$$a_0 = (u_{1,\text{num}}^2 / F_1^2 + u_{2,\text{num}}^2 / F_2^2)^{-1} \quad (\text{II.62})$$

Damit sind die Dirac'schen Kontinuumswellenfunktionen eindeutig festgelegt.

Für $Z > Z_{\text{krit}}$ taucht das $1s$ - Niveau in das negative Kontinuum ein. Dies ermöglicht, sofern der gebundene Zustand vorher unbesetzt war, spontane Positronenemission durch den energielosen Übergang eines Kontinuumslektrons negativer Energie in das $1s$ - Niveau. Das verbleibende Loch im Kontinuum ist definitionsgemäß ein Positron.

Die Energie der eingetauchten K - Schale, die als Resonanz in das untere Kontinuum eingebettet ist, läßt sich aus dem Amplitudenmaximum bei $r \sim 20$ fm der Kontinuumslösungen ermitteln. In Figur 14 ist die Ladungsverteilung $u_1^2 + u_2^2$ des eingetauchten $1s$ - Niveaus für $Z = 180$ und einem Kernradius $R = 9$ fm (homogen geladene Kugel) aufgetragen. Links der gestrichelten Senkrechten wurde für die Resonanz ein Skalierungsfaktor 10^{-2} eingeführt. Der absolute Energieeigenwert des $1s$ - Elektrons beträgt in natürlichen

Einheiten $E = -1.7455$. Für $E = -1.5$ wird als Beispiel eine Kontinuumslösung abseits der Resonanz gezeigt. Im asymptotischen Bereich $r \rightarrow \infty$ haben beide Ladungsverteilungen das gleiche Verhalten, jedoch zeigt sich für $r < 1000$ fm und für $E = -1.7455$ die typische Aufenthaltswahrscheinlichkeit der $1s$ - Elektronen in superschweren Systemen während die Kontinuumslösung für $E = -1.5$ keine auffällige Struktur aufweist und eine um mehrere Größenordnungen kleinere Amplitude hat.

Die Eintauchkurve $E_{1s}(Z)$ hat für $Z > Z_{\text{krit}}$ das Verhalten $E_{1s} \sim Z^n$ mit $n \geq 1$, während jedoch stets für das bindende Potential gilt $V(R \rightarrow 0) \sim Z^m$ mit $m < 1$. Hieraus folgt, daß zumindest für $Z \gg Z_{\text{krit}}$ die Eintauchkurve einen Wendepunkt haben muß, um sich für $Z \rightarrow \infty$ dem Anstieg des Potentials anpassen zu können.

Die relativistischen Kontinuumswellenfunktionen zu zwei Coulombzentren wurden bisher noch nicht numerisch berechnet. Als Lösungsmöglichkeit böte sich hierbei die Normierung der Zwei - Zentren Kontinuumswellenfunktionen auf eine Kugel oder ein Ellipsoid an mit $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$. Als Konsequenz nähmen die Energien analog zu den gebundenen Zuständen nur diskrete Werte an und müßten numerisch bestimmt werden.

2) Ionisationswahrscheinlichkeiten für innere Elektronenniveaus in superschweren Quasimolekülen

Es gibt verschiedene Abschätzungen⁵⁷⁻⁵⁹⁾ zur

K - Locherzeugungswahrscheinlichkeit L_0 im U - U Stoß bei einer Laborenergie von etwa 1500 MeV. Sie variieren zwischen $4 \cdot 10^{-6}$ und 10^{-1} . Damit die spontane und induzierte Positronenerzeugung experimentell beobachtbar ist, sollte $L_0 > 10^{-3}$ gelten.

Zunächst wird im Rahmen der zeitabhängigen Störungstheorie die Anregung von 1s - Elektronen in höhere gebundene ns - Zustände von superschweren Quasimolekülen untersucht, anschließend wird die direkte Ionisation in das obere Kontinuum behandelt. Ausgangspunkt sind die stationären Lösungen der Zwei - Zentren Diracgleichung^{36,37)}

$$\left(\vec{\alpha} \vec{p} + \beta m_e - \frac{Z_1 e^2}{|\vec{r} - \vec{R}/2|} - \frac{Z_2 e^2}{|\vec{r} + \vec{R}/2|} - E_n \right) \phi_n(\vec{r}, \vec{R}) = 0 \quad (\text{II.63})$$

$\vec{R}$ ist der Radiusvektor zwischen den beiden Coulombzentren.

Die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung⁶⁴⁾

$$i \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{II.64})$$

wird in diesen Basiszuständen entwickelt

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(\vec{r}, \vec{R}(t)) \exp\left\{-i \int_{-\infty}^t dt' E_n(t')\right\} \quad (\text{II.65})$$

Zu berechnen bleiben die zeitabhängigen Besetzungsamplituden $a_n(t)$ für die verschiedenen Zustände. Setzt man den Ansatz (II.65) in die Schrödinger Gleichung (II.64) ein, so führt dies zu einem unendlichen Satz von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{a}_n(t) = - \sum_{m \neq n} a_m(t) \langle \phi_n(t) | \partial / \partial t | \phi_m(t) \rangle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^t dt' (E_n - E_m) \right\} \quad (\text{II.66})$$

Das Gleichungssystem (II.66) ist vollständig äquivalent zur zeitabhängigen Dirac - Gleichung (II.64). In numerischen Rechnungen kann jedoch nur eine endliche Anzahl von gekoppelten Gleichungen gelöst werden, was den untersuchten Hilbertraum beschränkt. Als erste Näherung zur Lösung von (II.66) wurde die zeitabhängige Störungstheorie verwendet. Spätere Rechnungen⁶⁰⁾ im Rahmen der gekoppelten Kanalgleichungen führten im wesentlichen zu den gleichen Resultaten. In der Störungstheorie wird für einen Anfangszustand ϕ_m gesetzt: $a_m(t) = 1$. Alle anderen Amplituden sollen verschwinden. Dadurch läßt sich das System (II.66) sofort integrieren

$$a_n(t) = - a_n^p \int_{-\infty}^t dt' \langle \phi_n(t') | \partial / \partial t' | \phi_m(t') \rangle \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{t'} dt'' (E_n(t'') - E_m(t'')) \right\} \quad (\text{II.67})$$

Hierbei wird die Unitarität in der Größenordnung $\sum_n |a_n(t)|^2$

verletzt, wobei die Summe $\sum_n$ alle angeregten Zustände beinhaltet. Es sollte betont werden, daß in Gleichung (II.67) keine "never come back" Näherung enthalten ist, da Oszillationen in der Anregungsamplitude $a(t)$ erlaubt werden, die ein Springen der Löcher zwischen den Niveaus beschreiben bis schließlich der Endwert $a(t=\infty)$ erreicht wird. Der konstante Faktor a_n^p (meistens gleich 0 oder 1) wurde zur Berücksichtigung des Pauli - Prinzips bei den Übergängen $m \rightarrow n$ eingeführt. In U - U Stößen gilt für die Übergänge $1s \rightarrow 2s$ oder $3s$

$$a_{2s}^p = a_{3s}^p = 0 \quad (\text{II.68})$$

Bei direkter Ionisation in das obere Kontinuum folgt

$$a_E^p = 1 \quad (\text{II.69})$$

Im mitrotierenden Koordinatensystem läßt sich das Translationsmatrixelement aufspalten in einen radialen und einen Rotationsanteil

$$\partial/\partial t \longrightarrow \dot{R} \partial/\partial R - i \dot{\vec{\theta}} \vec{j} \quad (\text{II.70})$$

$\dot{\vec{\theta}}$ ist die Winkelgeschwindigkeit des Systems und $\vec{j}$ der Gesamtdrehimpuls des Elektrons. Bei symmetrischen Stoßpartnern koppelt der Rotationsanteil das $1s$ - Niveau zum $3d\pi$ - Zustand als niedrigsten Zustand, da hier die Parität erhalten werden muß. Wichtiger noch ist, daß das entsprechende Matrixelement für $R \rightarrow 0$ verschwindet. Auf der anderen Seite

koppelt der radiale Anteil zu allen höheren ns - Zuständen mit großen Matrixelementen bei kleinen Abständen. Wir haben uns daher beschränkt auf die Basis der 1s σ , 2s σ , 3s σ , 4s σ und 2p σ gebundenen Zustände sowie auf die Es σ und Ep σ Kontinuumszustände. Für die gebundenen Zustandswellenfunktionen wurden zunächst die Lösungen der Zwei - Zentren Diracgleichung in der Ein - Elektronen Näherung eingesetzt. Die Matrixelemente $\langle \phi_n | \partial / \partial R | \phi_m \rangle$, die die Dimension (Länge)⁻¹ haben, können durch numerisches Differenzieren $\partial \phi_m(r, R) / \partial R$ und anschließende Integration direkt berechnet werden. Es ist jedoch einfacher, unter Verwendung des Zwei - Zentren Potentials V_{tc} eine Umformung vorzunehmen

$$\langle \phi_n | \partial / \partial R | \phi_m \rangle = (E_m - E_n)^{-1} \langle \phi_n | \partial V_{tc} / \partial R | \phi_m \rangle \quad (\text{II.71})$$

Dies setzt voraus, daß die beiden Wellenfunktionen orthogonal und Eigenfunktionen des gleichen Hamilton Operators sind. In Figur 15a sind die $\partial / \partial R$ - Matrixelemente (gestrichelte Linien) des 1s - Zustandes mit dem 2s, 3s und 4s Zustand für das U - U System als Funktion von R aufgetragen. Die Matrixelemente zwischen jeweils benachbarten Zuständen 1s - 2s, 2s - 3s, 3s - 4s sind etwa gleich groß.¹³⁹⁾ Es zeigt sich ein Maximum für $R \sim R_{\min}$, was die starken Änderungen der relativistischen ns σ und np_{1/2} σ Wellenfunktionen für $Z\alpha > 1$ bei kleinen Abständen widerspiegelt. Als Vergleich hierzu zeigt die strichpunktierte Kurve ein

in Z skaliertes, entsprechendes nichtrelativistisches 1s - 2s Matrixelement für U - U. Das Maximum liegt bei etwa $R \sim 500$ fm und ist mindestens eine Größenordnung kleiner als das relativistische Resultat. Die Matrixelemente verschwinden nicht bei großen Abständen R, sondern erreichen einen konstanten Wert. Damit die Wellenfunktionen $\phi_n(R)$ auch asymptotische Lösungen der Streugleichung sind, müssen sie mit Translationsfaktoren⁶¹⁾ multipliziert werden

$$\tilde{\phi}_n(R) = \phi_n(R) \exp\{-(i/2) m_e \vec{v} \cdot \vec{r}\} \quad (\text{II.72})$$

Die Translationsfaktoren haben wir in erster Ordnung der Projektilgeschwindigkeit $\vec{v}$ berücksichtigt⁶²⁾.

Die hierdurch modifizierten Matrixelemente⁶³⁾ $\langle \tilde{\phi}_n | \partial / \partial R | \tilde{\phi}_m \rangle$ (durchgezogene Linien von Figur 15a) fallen für $R > 2000$ fm sehr rasch ab. Zum Teil wurden die Rechnungen in der Monopolnäherung durchgeführt, wobei das Zwei - Zentren Potential durch einen aufgeblähten, sphärischen Kern mit dem Radius $R_{eq} = 0.5 R$ erzeugt wurde. Aus dem Potential (II.4) folgt damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(R,r)}{\partial R} &= \frac{3Z\alpha}{R^2} - \frac{12Z\alpha r^2}{R^4} \quad \text{für } r < R/2 \\ & \quad \quad \quad (\text{II.73}) \\ \frac{\partial V(R,r)}{\partial R} &= 0 \quad \text{für } r \geq R/2 \end{aligned}$$

Die entsprechenden Ein - Zentren Elektronenwellenfunktionen ergeben sich durch numerische Integration der radialen

Differentialgleichungen (II.9), die zuvor auf logarithmischen Maßstab ($z = \ln r/r_0$) umtransformiert wurden.

$$\begin{aligned} du_1/dz &= -\kappa u_1 + e^z r_0 (E + m_e - V(z)) u_2 \\ du_2/dz &= -e^z r_0 (E - m_e - V(z)) u_1 + \kappa u_2 \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

Dies hat den Vorteil, daß die κ/r Singularität beseitigt und eine schnelle Integration ermöglicht wird. Als Test wurde die Orthogonalität der auf 1 normierten 1s und 2s Wellenfunktionen nachgeprüft. Wir fanden $\langle 2s | 1s \rangle < 10^{-4}$

Die erzielten $\partial/\partial R$ - Matrixelemente stimmten im Bereich von $20 \text{ fm} \leq R \leq 400 \text{ fm}$ innerhalb von 2% mit den exakten Zwei - Zentren Resultaten überein. Dies rechtfertigt die Verwendung der Monopolnäherung auch für die radialen Matrixelemente D bei Übergängen in die Es- Kontinuumszustände. Aus Figur 15b läßt sich erkennen, daß diese Matrixelemente ebenfalls bei $R \sim R_{\min}$ ihr Maximum haben und daß sie mit zunehmender Energie abfallen. Die Dimension von D ist $(\text{Energie})^{-1/2} (\text{Länge})^{-1}$, bei Kontinuums - Kontinuumsübergängen ist die Dimension von D $(\text{Energie} \cdot \text{Länge})^{-1}$. Als Übergangswahrscheinlichkeit zwischen gebundenen und oberen Kontinuumszuständen folgt analog zur Gleichung (II.67)

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{m_e}^{\infty} dE \left| \int_{-\infty}^t dt' \dot{R}(t') (E_{ns}(t') - E_{Es})^{-1} \langle \phi_{Es} | \partial V / \partial R(t') | \phi_{ns}(t') \rangle \right. \\ &\quad \cdot \left. \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{t'} dt'' (E_{Es} - E_{ns}(t'')) \right\} \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

In Figur 16 werden für das Pb - Pb System die radialen Matrixelemente für den Übergang $1s \rightarrow 5s$ als Funktion von R für die Kontinuumsenergien $E = 1.2, 2.0$ und 4.0 in natürlichen Einheiten angegeben. Die Übergangsstärke D in das obere Kontinuum für die $2s, 2p_{1/2}, 3s$ und $4s$ Anfangszustände wird für $E = 1.2$ und 4 in Figur 17a (Pb-Pb) und 17b (U-U) aufgetragen. Im Gegensatz zum nichtrelativistischen Fall ist stets ein Maximum bei $R = R_{\min}$ vorhanden. Für $R > 400$ fm setzen wir ein $c \cdot R^{-\gamma}$ Verhalten für die Matrixelemente an, wobei die Konstanten c und γ aus dem berechneten Bereich $R < 400$ fm bestimmt wurden. Für die Schwerionenbahnen wurden klassische Coulomb - Trajektorien angenommen. Die verwendete Parametrisierung der Rutherford - Hyperbeln ist in Anhang A dargelegt. Für einen U - U Stoß mit $E_{\text{CM}} = 800$ MeV kann der Zusammenhang zwischen Schwerionenstreuwinkel θ und dem minimalen Zwei - Zentren Abstand $R_{\min}$ sowie dem Stoßparameter b der Figur 18 entnommen werden. Die komplexen Übergangsamplituden $a_n(t)$ in Gleichung (II.67) erhält man durch numerische Integration. Die entsprechende $1s - 2s$ Anregungswahrscheinlichkeit $|a_n(t)|^2$ im Rahmen der Monopolnäherung wird in Figur 19 für $b = 0$ gezeigt. Bereits im einlaufenden Kanal sind leichte Oszillationen vorhanden. $|a_n(t)|^2$ erreicht kurz vor dem Abstand minimaler Annäherung bei $R_{\min} = 15$ fm ein Maximum mit 5%. Kehrt sich die Kernbewegung plötzlich um, so können die Elektronen nicht mehr adiabatisch dieser Änderung folgen und verteilen sich dadurch auf andere Niveaus. Dies spiegelt sich in dem ausgeprägten Maximum

bei $R \approx 80$ fm mit $|a_{2s}(t)|^2 = 0.28$ wieder. Nach zahlreichen Oszillationen erhalten wir asymptotisch für die 1s - 2s Anregungswahrscheinlichkeit unter der Annahme, daß der Endzustand zuvor leer war,

$$P(b=0) = 0.2$$

Bei der Anregung in die 3s und 4s - Zustände müssen die verschiedenen Kanäle (zum Beispiel die Ein - Schritt Anregung 1s - 3s und der Zwei - Schritt Prozeß 1s - 2s - 3s) kohärent aufaddiert werden. Die totalen Anregungswahrscheinlichkeiten $|a_n|^2$ - hier wurden Zwei - Zentren Wellenfunktionen verwendet - und $W(t)$ werden in Figur 20 als Funktion von R gezeigt. Die 1s - 2s Anregung entspricht wieder dem in der Monopolnäherung erzielten Resultat. Es ist zu erkennen, daß auch die direkte Ionisation (gestrichelte Kurve) entlang der Trajektorie variiert. Asymptotisch haben die direkte Ionisation und die Anregung in das 4s - Niveau den selben Wert, während im Bereich, in dem der 1s - Zustand in den Dirac - See eingetaucht ist ($R < 35$ fm), der Kontinuumsanteil dominiert.

Die Stoßparameterabhängigkeit $P(b) = |a(t=\infty, b)|^2$ für die 1s - 2s Anregung, sowie die Maximalwahrscheinlichkeit $|a(t, b)|_{\max}^2$ werden aus Figur 21 für einen U - U Stoß bei $E_{\text{CM}} = 800$ MeV und einem Pb - Pb Stoß bei $E_{\text{CM}} = 692$ MeV ersichtlich. Die Anregungswahrscheinlichkeit fällt exponentiell als Funktion des Stoßparameters b ab.

Im Pb - Pb System ist die Energiedifferenz zwischen dem 1s - und 2s - Niveau geringer als im überkritischen U - U System, außerdem ist die Ionengeschwindigkeit des Bleis etwas größer, woraus schließlich die höheren Werte für $P(b)$ resultieren⁶⁴⁾. Im Bereich $0 \leq b \leq 200$ fm nimmt $P(b)$ um fast zwei Größenordnungen ab. Das exponentiell abfallende Spektrum der in das Kontinuum emittierten Elektronen als Funktion ihrer kinetischen Energie läßt sich für das Quasimolekül $Z = 164$ und für $b = 0$ der Figur 22 entnehmen. Bei $E_e \approx 3$ MeV ist die differentielle Ionisationswahrscheinlichkeit dW/dE um fast vier Größenordnungen kleiner verglichen mit dem Maximalwert. Die Ionenenergieabhängigkeit der Coulomb Ionisation des 1s - Niveaus im U - U Stoß beim Stoßparameter $b = 0$ läßt sich aus Figur 23a erkennen. Eingezeichnet sind separat wie in Figur 20 die Anregung in das 2s, 3s und 4s - Niveau sowie in das Kontinuum (E). $f(n)$ bezeichnet die asymptotische Wahrscheinlichkeit, die experimentell meßbar ist durch die K_α - Strahlung in den wieder vollständig getrennten Stoßpartnern. $d(n)$ bezeichnet die mittlere Anregung während der Eintauchphase des 1s - Elektrons. Diese Daten sind bedeutsam für den experimentellen Nachweis der spontanen und induzierten Positronen. Mit abnehmender Ionenenergie fallen die auf 1 normierten Anregungswahrscheinlichkeiten sehr steil ab bis sie etwa bei Tandem - Energien ($E_{\text{Lab}} \leq 200$ MeV) viel kleiner als 10^{-6} sind. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich mit anwachsendem Stoßparameter. Die Verteilung

vermindert sich etwa auf die Hälfte zwischen $b = 0$ und $b = 20$ fm. Mit $P(b) = W(t=\infty, b)$ folgt für den totalen Wirkungsquerschnitt für die Loch - Produktion

$$\sigma^{\text{dir}} = \sum_m 2\pi \int_0^\infty P(b) b \, db \quad (\text{II.76})$$

Die Summe $\sum_m$ resultiert aus der Besetzung des Anfangszustandes.

Im U - U Stoß ergab sich bezüglich der direkten K - Loch Erzeugung über das $1s$ - Niveau $\sigma_K^{\text{dir}} = 2$ barn.

Für $E_{\text{Lab}} = 1600$ MeV und $b = 0$ ist die mittlere Wahrscheinlichkeit für $1s$ - Löcher während des Eintauchbereiches größer als 0.08, wobei Anregung in das Kontinuum und in das $4s$ - Niveau in Rechnung gestellt wurde. Der Wert $L_0 = 0.08$ liegt damit deutlich über früheren Abschätzungen. Die Stoßparameterabhängigkeit der direkten Ionisation auch für höhere gebundene Zustände in die $Es\sigma(\kappa=-1)$ beziehungsweise $Ep\sigma(\kappa=1)$ Kontinuumszustände wird für das Pb - Pb und das U - U System in Figur 24 gegeben⁶⁴⁾. Stets liegt das Maximum bei $b = 0$. Der Abfall von $P(b)$ wird mit zunehmenden Quantenzahlen schwächer. Aus den sehr hohen Ionisationswahrscheinlichkeiten der $2p_{1/2}$, $2s$ und $3s$ - Zustände bis zu 50% bei $b = 0$ können zwei Schlußfolgerungen gezogen werden.

1) Die Dynamik in Schwerionenstößen mit $Z\alpha > 1$ bei Energien im Bereich der Coulombbarriere führt zu einer starken Entvölkerung aller gebundenen Elektronenniveaus,

wobei von der L - Schale an aufwärts bei $b = 0$ Wahrscheinlichkeiten größer als 10% vorhanden sind.

2) Bei derart hohen Wahrscheinlichkeiten erlaubt die Störungstheorie keine quantitativ sicheren Aussagen mehr. Hierzu müssen die gekoppelten Kanalgleichungen gelöst werden.

Die in Figur 25 aufgetragenen Maximalwerte der Anregungswahrscheinlichkeit $W(t)_{\max} = |a(t)|_{\max}^2$ zeigen als Funktion des Stoßparameters qualitativ das gleiche Verhalten.

Die Rechnungen zu direkten Ionisation können nicht auf den Bereich $Z\alpha < 1$ ausgedehnt werden, da die Monopolnäherung nicht mehr angewendet werden darf. Die $\partial/\partial R$ - Matrixelemente haben hier ihr Maximum bei $R \sim 0$, auch können die Zwei - Zentren Kontinuumsfunktionen nicht durch Coulombwellen ersetzt werden unter Verwendung eines aufgeblähten Kernes mit einem Radius im Bereich von $R_{eq} \sim 10^3$ fm.

$Z = 144$ war daher die niedrigste Gesamtladung eines Quasimoleküls, für das die K - Loch Erzeugungswahrscheinlichkeit berechnet wurde. Wir fanden $P(0) = 3\%$ und $P(40 \text{ fm}) = 0.9\%$.

III Das Abschütteln der Vakuumpolarisationsladungsdichte in quasimolekularen Stößen von sehr schweren Kernen. Direkte Elektron - Positron Paarproduktion.

In diesem Kapitel wird die direkte Erzeugung von e^+, e^- - Paaren im Stoß schwerer Kerne durch die Anregung eines Elektrons aus dem Dirac See in das obere Kontinuum behandelt. Verglichen mit der üblichen Paarbildung in hochenergetischen Elementarteilchen-Stößen werden drei qualitativ neue Aspekte aufgezeigt.

- 1) Direkte e^+, e^- - Erzeugung wird verstanden als das Abschütteln der stark ausgeprägten Vakuumpolarisationsladungsdichte bei hohen effektiven Kernladungszahlen ($Z\alpha > 1$).
- 2) Die Paarerzeugung ist ein Kollektiveffekt bezüglich der Zahl der ausgetauschten Photonen zwischen Kernladungen und dem e^+, e^- - Paar. Dies führt zu einer extremen Ladungsabhängigkeit des totalen Querschnittes $\sigma \sim Z^{18}$.
- 3) Die direkte Paarerzeugung wird formuliert in der Basis der quasimolekularen Zustände.

Wir gehen aus von einem vollständigen Satz der stationären Zwei - Zentren Diracgleichung

$$E_i(R) \phi_i(\vec{r}, R) = H(r, R) \phi_i(\vec{r}, R) \quad (\text{III.1})$$

Die Funktionen ϕ_i hängen vom Abstand beider Kerne R als stetigen Parameter ab. Im Prinzip besteht eine Abhängigkeit

vom Vektor $\vec{R}$, aber wir vernachlässigen den Effekt der Orientierung der internuklearen Achse aus denselben Gründen wie in Kapitel II 2 bei der Ionisation innerer Elektronenniveaus. Die Zeitabhängigkeit wird in der semiklassischen Näherung durch die Einführung von $R = R(t)$ beschrieben. Der Einfluß des Vektorpotentials $\vec{A}$ auf die quasimolekularen Zustände wurde vernachlässigt, da die effektive magnetische Kopplungskonstante nur $Z\alpha v_{ion}/c$ ist, verglichen mit der elektrischen Kopplungskonstante $Z\alpha$ und da $v_{ion}/c \approx 0.1$ gilt.

Die Anfangselektronenkonfiguration ist charakterisiert durch einen Satz F von besetzten Zuständen, wobei F alle Zustände des negativen Energiekontinuums (Definition des Vakuums) und alle besetzten gebundenen Zustände enthält. Der Zustandsvektor dieser Konfiguration wird gekennzeichnet durch $|F\rangle$. Während des Stoßes können Elektron - Positron Konfigurationen angeregt werden. Der zeitabhängige Zustandsvektor des Systems kann geschrieben werden als

$$|\Psi(t)\rangle = c_0(t) |F\rangle + \sum_{j \in F} \sum_{i \notin F} c_{ij}(t) b_i^\dagger d_j^\dagger |F\rangle \quad (\text{III.2})$$

$b_i^\dagger$ und $d_j^\dagger$ sind die Erzeugungsoperatoren für Teilchen beziehungsweise Löcher. Die Normierungsbedingung lautet

$$|c_0|^2 + \sum_{j \in F} \sum_{i \notin F} |c_{ij}|^2 = 1 \quad (\text{III.3})$$

In erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie sind die Amplituden c_{ij} gegeben durch

$$c_{ij}(T) = - \int_{-\infty}^T dt \langle \Phi_i(R) | \dot{R} \partial / \partial R | \Phi_j(R) \rangle \cdot \exp \left\{ i \int_{-\infty}^t d\tau (E_i(R(\tau)) - E_j(R(\tau))) \right\} \quad (\text{III.4})$$

Um die Observable $|c_{ij}(T \rightarrow \infty)|^2$ zu berechnen, führen wir die zeitabhängige Dichtematrix ein

$$\rho_i(\vec{r}, t, R(t); \vec{r}', t', R(t') \equiv R') = \Phi_i^+(\vec{r}, R) \Phi_i(\vec{r}', R') \exp \left\{ i \int_{t'}^t d\tau E_i(R(\tau)) \right\} \quad (\text{III.5})$$

Hieraus läßt sich die Übergangswahrscheinlichkeit ableiten.

$$|c_{ij}(\infty)|^2 = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x \int d^3x' \cdot \{ \dot{R} \partial / \partial R \rho_i(\vec{r}, t, R; \vec{r}', t', R') \}^+ \{ \dot{R}' \partial / \partial R' \rho_j(\vec{r}, t, R; \vec{r}', t', R') \} \quad (\text{III.6})$$

Die totale Zahl der erzeugten Teilchen - Loch Paare N_{ph} nach dem Stoß erhält man durch Summation über i und j . Wir führen die Dichtematrizen ρ_+ der besetzten und ρ_- der leeren Zustände ein durch

$$\rho_+(\vec{r}, t, R; \vec{r}', t', R') = \sum_{j \in F} \rho_j \quad (\text{III.7})$$

$$\rho_- = \sum_{i \in F} \rho_i \quad (\text{III.8})$$

weiterhin die ladungssymmetrisierte Dichtematrix

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2} (\rho_+ - \rho_-) \quad (\text{III.9})$$

sowie

$$\rho = \frac{1}{2} (\rho_+ + \rho_-) \quad (\text{III.10})$$

Die Integrale in Gleichung (III.6) können interpretiert werden als Spur in der Koordinatendarstellung, wodurch man N_{ph} schreiben kann als

$$N_{ph} = \sum_{j \in F} \sum_{i \in F} |c_{ij}(\infty)|^2 =$$

$$- \text{Tr} \{ (\dot{R} \partial / \partial R \rho_-(R, R'))^+ \dot{R}' \partial / \partial R' \rho_+(R, R') \} =$$

$$\text{Tr} \{ (\dot{R} \partial / \partial R \tilde{\rho}(R, R'))^+ \dot{R}' \partial / \partial R' \tilde{\rho}(R, R') \} -$$

$$\text{Tr} \{ (\dot{R} \partial / \partial R \rho(R, R'))^+ \dot{R}' \partial / \partial R' \rho(R, R') \} \quad (\text{III.11})$$

Die letzte Form von Gleichung (III.11) zeigt deutlich die Natur des untersuchten Prozesses auf: Das Abschütteln der Vakuumpolarisationsladungsdichte und der gebundenen Elektronen. Die Dichtematrix $\tilde{\rho}$ kann zerlegt werden in die

Vakuumpolarisationsdichtematrix und in einen Anteil von den gebundenen Elektronen herrührend.

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{E_i < -m_e} \phi_i - \sum_{E_i > m_e} \phi_i \right\} + \sum_{\substack{i \in F \\ E_i > -m_e}} \phi_i \quad (\text{III.12})$$

Die Bedeutung von Gleichung (III.11) wird in Figur 26 veranschaulicht. Das Zwei - Photonen Paarerzeugungsdiagramm, gewöhnlich berechnet im Stoß von hochenergetischen Elementarteilchen unter Verwendung von ebenen Wellen, wird im Teil a) gezeigt. Teil b) beschreibt den Prozeß, der in diesem Kapitel abgeleitet wurde. Da im Stoß von sehr schweren Kernen $(Z_1 + Z_2)\alpha > 1$ gilt, müssen sehr viele Wechselwirkungen des elektrischen Feldes beider Kerne mit dem e^+, e^- - Paar in Rechnung gestellt werden. Daher enthält Diagramm 26b) im Prinzip unendlich viele Feynman Diagramme vom Typ a). Die kohärente Summation aller Wechselwirkungen vermittelt durch das virtuelle Photonenfeld zeigt die kollektive Natur des Prozesses auf. Für $Z_1 + Z_2 \ll \alpha^{-1}$ ist diese Kollektivität klein, dies bedeutet, daß Paarproduktion gut durch Diagramm 26a) beschrieben werden kann. Für $(Z_1 + Z_2)\alpha > 1$ wird jedoch der kollektive Effekt dominant, was sich in der Z - Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnittes widerspiegelt. Der Zwei - Photonen Prozeß wächst mit Z^4 an, während im superschweren Bereich bei konstanter Ionengeschwindigkeit die Proportionalität $\sigma^{e^+, e^-} \sim Z^{18}$ besteht.

Um Gleichung (III.4) numerisch zu berechnen, ist es

zweckmäßig, zunächst Umformungen vorzunehmen. Analog zu Gleichung (II.71) kann der $\partial/\partial R$ - Operator so umtransformiert werden, daß nur noch die radiale Ableitung des Potentials berechnet werden muß. Gleichung (III.4) wird partiell integriert.

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle i | \partial/\partial t | j \rangle \exp \left\{ i \int_{t_0}^t (E_i - E_j) dt' \right\} = \\
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle i | \partial V / \partial t | j \rangle (E_i - E_j)^{-1} \exp \{ i (E_i - E_j)(t - t_0) \} = \\
 &= \frac{\langle i | \partial V / \partial t | j \rangle}{E_i - E_j} \frac{\exp \{ i (E_i - E_j)(t - t_0) \}}{i (E_i - E_j)} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
 &- \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d}{dt} \langle i | \partial V / \partial t | j \rangle \frac{\exp \{ i (E_i - E_j)(t - t_0) \}}{i (E_i - E_j)^2} \quad (\text{III.13})
 \end{aligned}$$

Der erste Term der rechten Seite von (III.13) ergibt Null, da die Matrixelemente $\langle i | \partial V / \partial t | j \rangle = \dot{R} \langle i | \partial V / \partial R | j \rangle$ (III.14) asymptotisch verschwinden. Die Kontinuumsenergien E_i und E_j sind unabhängig vom Zwei - Zentren Abstand R . Es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle i | \partial V / \partial t | j \rangle &= \dot{R} \partial / \partial R (\dot{R} \langle i | \partial V / \partial R | j \rangle) = \\
 \ddot{R} \langle i | \partial V / \partial R | j \rangle &+ \dot{R}^2 \partial / \partial R \{ \langle i | \partial V / \partial R | j \rangle \} \quad (\text{III.15})
 \end{aligned}$$

Gleichung (III.15) ist eine gerade Funktion von t , so daß

nach der Zerlegung

$$\exp \{i(E_i - E_j)t\} = \cos (E_i - E_j)t + i \sin (E_i - E_j)t \quad (\text{III.16})$$

nur noch der $\cos$ - Anteil zum Integral (III.13) beiträgt.

Damit folgt

$$|c_{ij}(\infty)| = \left| 2 \int_0^\infty dt \frac{\cos((E_i - E_j)t) \{ \ddot{R} + \dot{R}^2 \partial/\partial R \} \langle \phi_i | \partial V / \partial R | \phi_j \rangle}{(E_i - E_j)^2} \right| \quad (\text{III.17})$$

Für $R(t)$ wurden wie bei der Ionisation Rutherford - Trajektorien angenommen. Die Berechnung der Kontinuum - Kontinuum Matrixelemente erfolgte numerisch in der Monopolnäherung analog zur Ionisation von gebundenen Elektronenniveaus in das obere Kontinuum. Der totale Wirkungsquerschnitt zur direkten e^+, e^- - Erzeugung ist abschließend gegeben durch

$$\sigma^{e^+, e^-} = 2\pi \int_0^\infty P(b) b db = 2\pi^2 \sum_{\kappa=-1,1} |\kappa| \int_0^\infty b db \int_{-\infty}^{-m} dE \int_m^\infty dE' |c_{EE'}(\infty)|^2 \quad (\text{III.18})$$

Der zusätzliche Faktor $2|\kappa|$ resultiert aus der Besetzung eines Elektronenniveaus. Bei der Summation über die verschiedenen beitragenden Drehimpulse genügt es, nur Zustände mit $\kappa = -1$ (s - Wellen) und mit $\kappa = 1$ (p - Wellen)

zu berücksichtigen. Für diese etwa gleich stark beitragenden Zustände zeigen die Matrixelemente in (III.17) wieder ein Maximum bei kleinen Werten von R . Die entsprechenden Matrixelemente für Zustände mit $\kappa = \pm 2$ sind um mehr als zwei Größenordnungen kleiner. Im Gegensatz zu $|\kappa| = 1$ haben sie für $Z = 164$ ihr Maximum bei $R \sim 300$ fm und verschwinden für $R \sim 0$. Für $(Z_1 + Z_2)\alpha \ll 1$, zum Beispiel für das Ni - Ni System, zeigen auch die Matrixelemente für $|\kappa| = 1$ ein ähnliches Verhalten und können daher nicht in der Monopolnäherung berechnet werden.

Aufgrund der numerischen 6 - fachen Integration und der einen Differentiation kann der totale Wirkungsquerschnitt nur mit einer Genauigkeit von $\pm 50\%$ angegeben werden.

Die nachfolgende Tabelle zeigt den totalen

Paarerzeugungswirkungsquerschnitt⁶⁶⁾ für symmetrische

Stöße mit einer totalen Kernladung $Z = Z_1 + Z_2$ bei

Ionenenergien, so daß der minimale Zwei - Zentrenabstand

jeweils $R_{\min} = 16$ fm beträgt. σ^{e^+, e^-} zeigt ein rasches

Ansteigen in Z . Das Energiespektrum der erzeugten

Positronen und Elektronen wird in Figur 27a für das

Pb - Pb System gezeigt. Der Hauptunterschied zwischen

der Elektronen - und Positronenverteilung - das Verhalten

bei kleinen Energien - kann durch die Coulombabstoßung

der Positronen erklärt werden. Die Positronenverteilung

hat ihr Maximum bei etwa 400 keV kinetischer Energie mit

$d\sigma/dE_p \sim 0.1$ b/keV. Es werden mehr hochenergetische

Positronen als Elektronen erzeugt.

Selbst wenn man den eventuell nichtadiabatischen Anteil ($E_{\text{kin}} \leq 200 \text{ keV}$) unberücksichtigt läßt, ändert sich der totale Querschnitt nur um weniger als einen Faktor 2.

Die Stoßparameterabhängigkeit der direkten Paarerzeugung ist in Figur 27b bis zu $b = 40 \text{ fm}$ aufgetragen. $b \cdot P(b)$

hat ein Maximum bei $b = 3 \text{ fm}$ und fällt für große

Stoßparameter exponentiell ab. Die Größenordnung der errechneten Daten erlaubt auch eine experimentelle

Beobachtbarkeit des Abschüttelns der Vakuumpolarisationswolke

im Stoß schwerer Kerne, wobei sich das Pb - Pb System

aufgrund der relativ niedrigen Rate der Paarerzeugung

durch Hintergrundeffekte auszeichnen dürfte. Die extrem

starke Energieabhängigkeit der direkten Paarerzeugung

im Pb - Pb Stoß kann dem Teil b der nachfolgenden Tabelle

entnommen werden. Angegeben werden der minimale

Zwei - Zentrenabstand R_{min} und der entsprechende totale

Wirkungsquerschnitt.

(a) Z	$\sigma [\mu\text{b}]$	(b) $R_{\text{min}} [\text{fm}]$	$\sigma [\mu\text{b}]$
146	5.7	25	3.0
158	33.4	20	19.4
164	76.4	16	76.4
168	135.0	13	193.4

Die bisherigen Rechnungen können nicht ohne weitere Näherungen auf den Bereich $Z > Z_{\text{krit}}$ ausgedehnt werden, da hier das gebundene $1s$ - Niveau als Resonanz in das untere Kontinuum eingebettet ist. Der bisher verwendete Formalismus beinhaltet damit auch automatisch die Ionisation der K - Schale. Asymptotisch hätte man hierbei kein Loch im unteren Kontinuum (Positron), sondern ein Loch in der K - Schale des einen Stoßpartners. Für Kontinuumszustände mit $\kappa = 1$ ist jedoch bis $Z = 184$ das Problem eines eingetauchten, gebundenen Niveaus noch nicht vorhanden. Wir fanden $\sigma^{e^+, e^-}(\kappa=1) = 457.4 \mu\text{b}$ für den $U - U$ Stoß bei $R_{\text{min}} = 16 \text{ fm}$. Damit ist dieser Wirkungsquerschnitt gleich groß, verglichen mit der spontanen und induzierten Positronenerzeugung¹⁻³⁾. Auch die in Figur 28 aufgetragenen Energiespektren der Positronen zeigen keinen qualitativen Unterschied. Die durchgezogene Kurve gibt das induzierte Positronenspektrum, die gestrichelte das der direkten e^+ - Erzeugung wieder. Es muß jedoch betont werden, daß bei den Berechnungen des induzierten Positronenspektrums stets eine konstante K - Lochwahrscheinlichkeit von $L_0 = 0.01$ angesetzt wurde. Durch die berechneten, höheren K - Lochwahrscheinlichkeiten sollte sich dieses Spektrum deutlich im Absolutwert und in der Verteilung ändern. Erst wenn diese Rechnungen abgeschlossen sein werden, ist eine eindeutige Aussage über die Meßbarkeit des Zerfalls des neutralen Vakuums im $U - U$ Stoß möglich.

Mit Hilfe von Gleichung (II.75) konnte ein Teil des induzierten Positronenspektrums nachgerechnet werden. Anfangszustände sind hier die negativen Energiezustände mit $\kappa = -1$, Endzustand ist die als leer angenommene K - Schale. Um Effekte der in das Kontinuum eingebetteten 1s - Resonanz auszuschließen wurden nur Positronenzustände mit $E_{\text{kin}} > 500 \text{ keV}$ berücksichtigt. Für den U - U Stoß bei $b = 0$ fanden wir $P(0) = 4 \cdot 10^{-3}$. Dies ist in guter Übereinstimmung mit den veröffentlichten Daten¹⁻³⁾ unter Berücksichtigung aller Positronenzustände ($L_0=1$) $P_{\text{ind}}(0) = 7 \cdot 10^{-3}$.

IV Paarbildung durch Konversion von Bremsstrahlungsphotonen

1) Nukleare Bremsstrahlung

Kern - Kern Bremsstrahlung ist ein wesentlicher Hintergrundeffekt zur quasimolekularen Röntgenspektroskopie. Im Energiebereich jenseits der K_{α} - Linie des total vereinigten Systems liefert die nukleare Bremsstrahlung sogar den dominanten Anteil des Spektrums. Für Energien $\omega > 2 m_e$ können emittierte virtuelle Photonen in ein e^+, e^- - Paar konvertieren. Dieser Prozeß tritt damit im U - U Stoß ebenfalls in Konkurrenz zur spontanen und induzierten Positronenemission in überkritischen Feldern und wird daher in diesem Kapitel berechnet. Ausgangspunkt unserer Betrachtungen soll zunächst die Berechnung der Kern - Kern Bremsstrahlung sein. Hierzu wird die klassische Näherung verwendet, die gerechtfertigt ist, wenn der Sommerfeldparameter η groß verglichen mit 1 ist. Für einen U - U Stoß an der Coulombbarriere gilt

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} > 600 \quad (\text{IV.1})$$

wobei v die relative Geschwindigkeit der streuenden Kerne im Eingangskanal ist. Für die Kerne werden klassische hyperbolische Bahnen angenommen, eine Rückwirkung des abgestrahlten Photons auf die Bahnbewegung wird vernachlässigt. Zur Bestimmung der e^+, e^- - Paarerzeugung ist allein die Energieverteilung des Bremsstrahlungsspektrums von Bedeutung.

Für die sehr umfangreichen Ableitungen des differentiellen Wirkungsquerschnittes in bezug auf die Energie E_x des abgestrahlten Photons sei auf die Referenzen 66, 67 und 68 verwiesen. Als Ergebnis erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE_x} = & \frac{\alpha^3}{E_x} \left(\frac{c}{v}\right)^2 Z_1^2 Z_2^2 \left(\frac{\hbar c}{Mc^2}\right)^2 v \left\{ \left(\frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2}\right)^2 \left(-\frac{16}{3} e^{-\pi v} K_{iv}(v) K'_{iv}(v)\right) \right. \\ & \left. + A_R^2 \left(\frac{Z_1}{A_1^2} + \frac{Z_2}{A_2^2}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 e^{-\pi v} \left(\frac{16}{3} v K_{iv}^2(v) - \frac{16}{5} K_{iv}(v) K'_{iv}(v)\right) \right\} \quad (IV.2) \end{aligned}$$

wobei der Term proportional zu $(Z_1/A_1 - Z_2/A_2)^2$ der Dipolanteil und der Term proportional zu $(Z_1/A_1^2 + Z_2/A_2^2)^2$ der Quadrupolanteil ist. Alle höheren Multipolaritäten können vernachlässigt werden, was sich aus dem Vergleich mit dem exakten, nicht nach Multipolen zerlegten Querschnitt zeigte⁶⁸⁾, der numerisch berechnet wurde. In Gleichung (IV.2) ist M die Ruhemasse eines Nukleons, weiterhin gilt

$$v = \omega/\omega_0 \quad (IV.3)$$

$$\omega_0 = \left[\frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu a^3} \right]^{1/2} \quad (IV.4)$$

$$a = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2 E_{CM}} \quad (IV.5)$$

μ ist die reduzierte Masse

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad (IV.6)$$

und A_R die reduzierte Massenzahl $A_R = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}$ (IV.7)

K und K' sind MacDonald - Funktionen und ihre Ableitungen in bezug auf das Argument. Sie sind verknüpft mit den Hankelfunktionen über die Beziehung

$$K_{i\nu}(z) = \pi i/2 e^{-\pi\nu/2} H_{\nu}^{(1)}(z e^{i\pi/2}) \quad (IV.8)$$

Die Berechnung der MacDonald - Funktionen kann durch numerische Integration erfolgen

$$K_{i\nu}(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh t} \cos \nu t \, dt \quad (IV.9)$$

Weiterhin soll noch die für die Paarerzeugung relevante Hochenergieapproximation ($E_x > 2 m_e c^2$) angegeben werden.

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE_x} = & \frac{\alpha^3}{E_x} \left(\frac{c}{v}\right)^2 z_1^2 z_2^2 \left(\frac{\hbar c}{Mc^2}\right)^2 v \left\{ \left(\frac{z_1}{A_1} - \frac{z_2}{A_2}\right)^2 (e^{-2\pi\nu} \frac{16}{3} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{v}) \right. \\ & \left. + A_R^2 \left(\frac{z_1}{A_1^2} + \frac{z_2}{A_2^2}\right) \left(\frac{v}{c}\right)^2 (e^{-2\pi\nu} \frac{8 \cdot 2^{1/3} \Gamma^2(2/3)}{3^{2/3}} \frac{1}{v^{1/3}}) \right\} \quad (IV.10) \end{aligned}$$

mit $\Gamma(2/3) = 1.35412...$

Der differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dE_x$ für

Dipol - und Quadrupolstrahlung ist für die Systeme

$^{238}\text{U} - ^{238}\text{U}$ bei $E_{\text{Lab}} = 1400 \text{ MeV}$ und $^{132}\text{Xe} - ^{238}\text{U}$ bei

$E_{\text{Lab}} = 700 \text{ MeV}$ in Figur 29 aufgetragen. Aufgrund des kleinen Dipolmomentes in den Systemen ist die Quadrupolstrahlung stets dominant für den aufgezeigten Bereich von $1 \text{ MeV} < E_x < 5 \text{ MeV}$. Das Spektrum fällt exponentiell ab. Experimentell konnte nukleare Bremsstrahlung erstmals von Greenberg⁶⁹⁾ und seinen Mitarbeitern beim Stoß von $^{12}\text{C} - ^{58}\text{Ni}$ sowie $^{18}\text{O} - ^{58}\text{Ni}$ vermessen werden. Die gemessenen Daten sind innerhalb der experimentellen Genauigkeit identisch mit den aus Gleichung (IV.2) berechneten Resultaten und rechtfertigen damit eindeutig die gemachten Approximationen.

2) Konversionskoeffizienten zur inneren Paarbildung

Um die Paarerzeugungsrate durch Bremsstrahlungsphotonen berechnen zu können, muß zunächst der Konversionskoeffizient $\beta_{E\lambda}$ bestimmt werden, der das Zahlenverhältnis der beim Zerfall eines angeregten Kernzustandes ($\Delta E > 2 m_e$) entstandenen e^+, e^- - Paare N_{e^+, e^-} zu den emittierten Photonen N_γ angibt. Der Prozeß der inneren Konversion geschieht aufgrund der retardierten Wechselwirkung zwischen den Ladungen des Kerns und der des Elektrons. Als Übergangsmatrixelement folgt^{12,70)}

$$M_{fi} = -\alpha \iint d\vec{r}_N d\vec{r} j_N j e^{i\omega r'/r'} \quad (IV.11)$$

$$r' = |\vec{r}_N - \vec{r}|$$

Der Vektor $\vec{r}_N$ bezeichnet die Koordinaten des Kerns, $\vec{r}$ die des Elektrons. Das Integral über die beiden Volumenelemente in (IV.11) separiert in guter Näherung in zwei Einzelintegrationen, da der Überlapp zwischen den Elektronenwellenfunktionen und dem Kern vernachlässigbar ist. Für Punktkerne ist diese Separation exakt. Die Übergangsströme sind für Diracteilchen

$$j_\mu(\vec{r}_i) = \bar{\Psi}(\vec{r}_i) \gamma_\mu \Psi(\vec{r}_i) \quad (IV.12)$$

Unter Verwendung von ebenen Wellen für die Elektronen und einer Multipolzerlegung des retardierten Potentials läßt

sich das Matricelement M_{fi} analytisch auswerten. Dividiert man die aus (IV.11) berechnete Wahrscheinlichkeit durch die Emissionswahrscheinlichkeit eines Photons beim Kernübergang, so erhält man den Konversionskoeffizient. Der differentielle Konversionskoeffizient $d\beta/dE_+$ ist in der Literatur^{12,71,72)} mehrfach abgeleitet worden und soll hier für elektrische Dipol - und Quadrupolübergänge angegeben werden ($\hbar = c = m_e = 1$)

$$\frac{d\beta_{E1}}{dE_+} = \frac{\alpha}{\pi\omega^3} \{ (E_+^2 + E_-^2) \ln \frac{1 + E_+E_- + p_+p_-}{\omega} + 2 p_+p_- \} \quad (IV.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_{E2}}{dE_+} = \frac{\alpha}{\pi\omega^5} \{ \omega^2 (E_+^2 + E_-^2 - 2) \ln \frac{1 + E_+E_- + p_+p_-}{\omega} \\ + \frac{8}{3} p_+p_- (E_+E_- - 1) \} \end{aligned} \quad (IV.14)$$

$$p_{\pm}^2 = E_{\pm}^2 - 1 \quad (IV.15)$$

$$E_+ + E_- = \omega \quad (IV.16)$$

Der totale Konversionskoeffizient kann nur durch numerische Integration - zum Beispiel mit Hilfe der Simpson - Regel - im Bereich $1 \leq E_+ \leq \omega - 1$ gewonnen werden. Das differentielle Positronenspektrum $d\beta/dE_+$ wird für $\omega = 1.5$ MeV, eine typische Übergangsenergie gefolgt von Paarerzeugung in $^{238}_{92}\text{U}$, und für $\omega = 4.086$ MeV, die Anregungsenergie des

2^+ - Zustandes in $^{208}_{82}\text{Pb}$, in Figur 30 gezeigt⁷³⁾. Die symmetrische Verteilung resultiert aus der Born'schen Näherung. Unter Verwendung von Coulombwellenfunktionen wird das Positronenspektrum drastisch zu höheren Energien verschoben, jedoch bleibt die totale Erzeugungsrate nahezu unverändert⁷⁴⁻⁷⁸⁾ und ist in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten⁷⁹⁾. Sogar für $Z = 84$ beträgt diese Änderung von β weniger als 20%. Um auch die Energieverteilung der Positronen richtig zu beschreiben haben wir, wie in β - Zerfallsrechnungen üblich, den differentiellen Konversionskoeffizienten $d\beta/dE_+$ aus (IV.13) und (IV.14) mit dem Korrekturfaktor^{13,78)}

$$F = \frac{4\pi^2 (Z\alpha)^2 / p_+ p_-}{(e^{2\pi Z\alpha/p_+} - 1)(1 - e^{-2\pi Z\alpha/p_-})} \quad (\text{IV.17})$$

multipliziert, jedoch normiert auf den totalen Wert erzielt in der Born'schen Näherung. Der Korrekturfaktor F gibt die verschiedene Verteilung von Elektronen und Positronen am Kernort an.

Mit dem vorhandenen Computerprogramm für die Dirac'schen Kontinuumswellenfunktionen g und f kann in zukünftigen Rechnungen der differentielle Konversionskoeffizient auch exakt bestimmt werden. Es gilt für Übergänge der Multipolarität EL oder ML⁷⁶⁾

$$\frac{d\beta(EL)}{dE_+} = \frac{\pi\alpha\omega}{L(L+1)(2L+1)} \sum_{\kappa, \kappa'} C_{\kappa, \kappa'} \{ (\kappa' - \kappa) \cdot \int_0^\infty \{ h_{L-1} ((g_\kappa f_{\kappa'} + f_\kappa g_{\kappa'}) + L (g_\kappa f_{\kappa'} - f_\kappa g_{\kappa'})) + L h_L (f_\kappa f_{\kappa'} + g_\kappa g_{\kappa'}) \} r^2 dr \}^2 \quad (IV.18)$$

$$\frac{d\beta(ML)}{dE_+} = \frac{\pi\alpha\omega}{L(L+1)(2L+1)} \sum_{\kappa, \kappa'} B_{\kappa, \kappa'} \cdot \left\{ \int_0^\infty h_L (f_\kappa g_{\kappa'} + g_\kappa f_{\kappa'}) r^2 dr \right\}^2 \quad (IV.19)$$

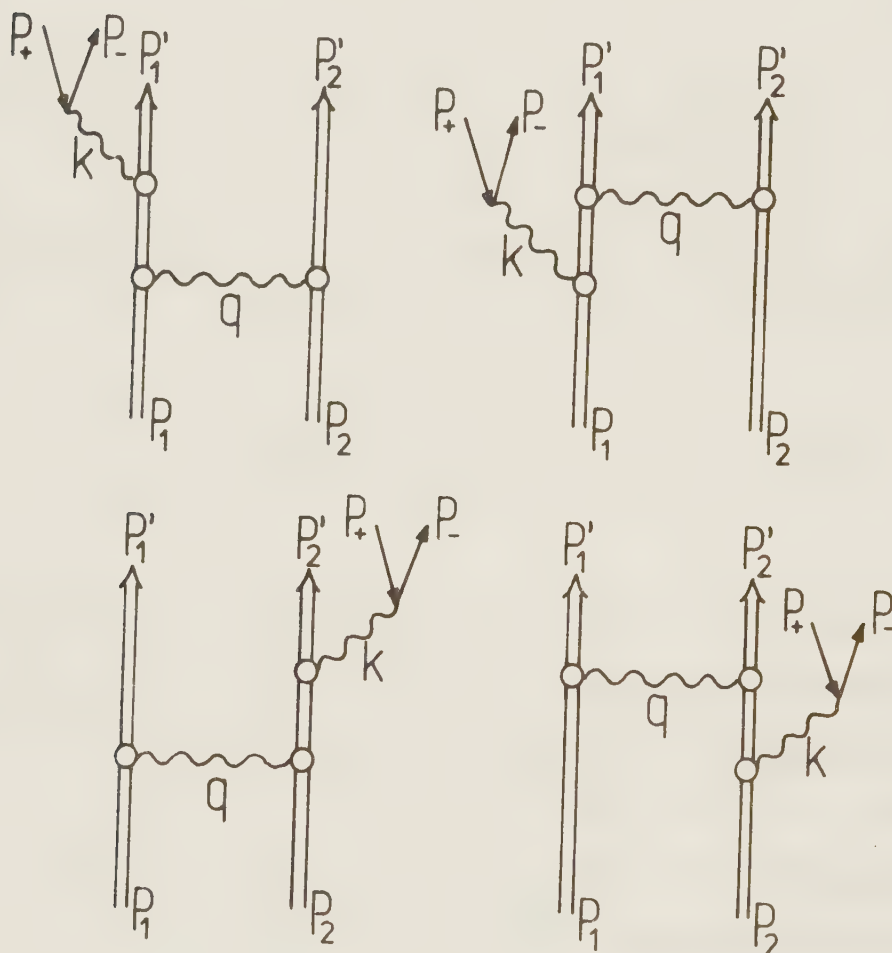
$$C_{\kappa, \kappa'} = B_{-\kappa, \kappa'} / (-\kappa + \kappa')^2 \quad (IV.20)$$

h_L ist die Hankelfunktion der Ordnung L . $B_{\kappa, \kappa'}$ sind Koeffizienten, die von den Drehimpulsen κ und κ' der Kontinuumswellenfunktionen und von der Multipolarität L abhängen. Sie sind tabelliert in Ref. 80.

Mit Hilfe dieser exakten Konversionskoeffizienten wird auch eine genaue Spektroskopie (zum Beispiel Bestimmung der Multipolarität eines Übergangs) von hochangeregten Kernzuständen erleichtert^{75,79}).

3) Wirkungsquerschnitte zur e^+, e^- - Produktion

Paarerzeugung durch Bremsstrahlungsphotonen wird in der Born'schen Näherung durch die folgenden vier Feynman - Diagramme 4. Ordnung beschrieben.



Im Schwerionenstoß kann der totale Wirkungsquerschnitt für diesen Prozeß mit Hilfe des Bremstrahlungsspektrums (IV.2) und der aus (IV.13) und (IV.14) ermittelten Konversionskoeffizienten berechnet werden.

$$\sigma = \sum_{L=1}^2 \int_0^{\infty} d\sigma_{\text{Brems}}^L / d\omega \cdot B_{\text{EL}}(\omega) d\omega \quad (\text{IV.21})$$

L bezeichnet die Multipolarität des Übergangs. Die Gültigkeit der Faktorisierung wurde durch den Vergleich mit Rechnungen in logarithmischer Genauigkeit resultierend aus den Feynman Graphen in Ref. 81 aufgezeigt. Für den U - U Stoß wurde von Gershtein und Popov^{82,83)} der Dipolanteil von Gleichung (IV.21), der in symmetrischen Systemen nicht vorhanden ist, bestimmt zu $\sigma_{\gamma e^+, e^-} < 10^{-11}$ barn. Unsere Resultate für Bremsstrahlung und nachfolgende Paarerzeugung sind für die Systeme $^{132}_{54}\text{Xe} - ^{238}_{92}\text{U}$ und $^{238}_{92}\text{U} - ^{238}_{92}\text{U}$ getrennt nach Dipol - und Quadrupolanteil in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt. σ in barn. $\omega > 1.1$ MeV.

	$\sigma_{\gamma}^{\text{E1}}$	$\sigma_{\gamma}^{\text{E2}}$	$\sigma_{e^+, e^-}^{\text{E1}}$	$\sigma_{e^+, e^-}^{\text{E2}}$
Xe-U	5.56(-5)	2.74(-4)	1.2(-8)	2.57(-8)
U-U	-	6.47(-4)	-	5.8 (-8)

$E_{\text{Lab}}(\text{Xe-U}) = 700$ MeV, $E_{\text{Lab}}(\text{U-U}) = 1400$ MeV.

Als totaler Querschnitt σ_{e^+, e^-} im superschweren U - U System folgt $\sigma = 5.8 \cdot 10^{-8}$ barn⁶⁸⁾. Dieser Prozeß ist daher vernachlässigbar verglichen mit der induzierten und spontanen Positronproduktion in überkritischen Feldern.

Bremsstrahlungsphotonen können auch über den Bethe - Heitler Prozeß (Kapitel VI 2) e^+, e^- - Paare an benachbarten Kernen erzeugen oder über den Photoeffekt einen Beitrag zur K - Locherzeugung liefern.

Jedoch sind die Bremsstrahlungswirkungsquerschnitte viel zu klein, so daß es nicht notwendig ist, diesen Targetmaterial - abhängigen Effekt zu berechnen.

V Innere Paarbildung erzeugt durch Coulombanregung von schweren Kernen

1) Bestimmung des Wirkungsquerschnittes

Im Schwerionenstoß können hochliegende Kernniveaus durch die repulsiven Coulombkräfte angeregt werden. Der Zerfall dieser Niveaus erfolgt entweder durch Emission von Photonen, durch Konversion von gebundenen Elektronen oder durch innere e^+, e^- - Paarbildung, sofern die Übergangsenergie größer als die doppelte Ruhemasse des Elektrons ist $\Delta E > 2 m_e c^2$. In diesem Kapitel werden drei wesentliche Konsequenzen aus der nuklearen Coulombanregung bezüglich der Quantenelektrodynamik starker Felder und der Atomphysik im Schwerionenstoß diskutiert.

a) Die innere Paarbildung induziert durch nukleare Coulombanregung im U - U Stoß ist ein nicht vernachlässigbarer Hintergrundeffekt zur spontanen und induzierten Positronenerzeugung und bedarf daher einer genauen Berechnung.

b) Emission von gebundenen Elektronen in das obere Kontinuum durch Konversion ist ein Konkurrenzeffekt zur Ionisation im Schwerionenstoß. Quasimolekulare Röntgenstrahlung kann nicht auf die Zahl der gemessenen Elektronenübergänge in den separierten Atomen normiert werden.

c) Bei Streuungen an der Coulombbarriere überdeckt das Photonenspektrum resultierend aus der nuklearen Coulombanregung im allgemeinen das quasimolekulare Spektrum.

Obwohl die mittlere Zerfallszeit bei Kern - Quadrupol-übergängen ($\Delta E > 2 m_e c^2$) mit $\tau_{\text{dec}} \sim 10^{-13}$ sec groß ist verglichen mit der Stoßzeit $\tau_{\text{coll}} \sim 10^{-21}$ sec, in der spontane und induzierte Positronen emittiert werden, lassen sich beide Prozesse experimentell auch mittels Koinzidenztechniken nicht trennen.

Werden bei der inneren Paarbildung der gestreuten Kern und das Positron in Koinzidenz gemessen, dann ist der differentielle Paarerzeugungsquerschnitt gegeben durch das Produkt des Streuquerschnittes und der Positronen - Emissionswahrscheinlichkeit von beiden Kernen^{73,84)}

$$\frac{d^2 \sigma_{e^+, e^-}}{dE_p d\Omega_{\text{ion}}} = \frac{d\sigma_{\text{scatt}}(\theta_{\text{ion}})}{d\Omega_{\text{ion}}} \left(\frac{dW_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}(\theta; 1)}{dE_p} + \frac{dW_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}(\theta'; 2)}{dE_p} \right) \quad (\text{V.1})$$

Im Schwerpunktsystem ist $\theta = \theta'$.

Für identische Kerne muß Gleichung (V.1) ersetzt werden durch

$$\frac{d^2 \sigma_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}}{dE_p d\Omega_{\text{ion}}} = 2 \frac{dW_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}(\theta)}{dE_p} \frac{d\sigma_{\text{scatt}}(\theta)}{d\Omega} + 2 \frac{dW_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}(\pi-\theta)}{dE_p} \frac{d\sigma_{\text{scatt}}(\pi-\theta)}{d\Omega} \quad (\text{V.2})$$

Der totale Querschnitt ist in diesem Fall gegeben durch

$$\sigma_{\text{Cb}}^{e^+, e^-} = \frac{1}{2} \left(\int dE_p \int d\Omega_{\text{ion}} \frac{d^2 \sigma_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}}{dE_p d\Omega_{\text{ion}}} \right) \quad (\text{V.3})$$

Im Prinzip sollten die Gleichung (V.1) und (V.2) noch Interferenzterme enthalten, die zu Oszillationen im Querschnitt führen. Jedoch haben für schwere Kerne diese Oszillationen eine sehr große Frequenz und mitteln sich aufgrund des großen Sommerfeld - Parameters η heraus.

Die differentielle Wahrscheinlichkeit für Paarbildung setzt sich multiplikativ aus drei Anteilen zusammen

$$\frac{dW_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}(E_p, \theta_{\text{ion}})}{dE_p} = \sum_{i, f} P_i^{\text{Cb}}(\theta_{\text{ion}}) P_{if}^Y \frac{d\beta_{if}(E_p)}{dE_p} \quad (\text{V.4})$$

P_i^{Cb} beschreibt die asymptotische Anregungswahrscheinlichkeit $|a_i(t=\infty)|^2$ eines Kernzustandes $|i\rangle$.

P_{if}^Y ist das Verzweigungsverhältnis in einen der möglichen Endzustände $|f\rangle$. Mit Hilfe der Übergangsraten $T(E\lambda)$ erhält man

$$P_{if}^Y = \frac{T(E\lambda, i \rightarrow f)}{\sum_k T(E\lambda, i \rightarrow k)} \quad (\text{V.5})$$

$d\beta_{if}(E_p)/dE_p$ ist der differentielle Konversionskoeffizient.

2) Coulombanregung im Schwerionenstoß

Das kollektive Rotations - Vibrations Modell⁸⁵⁾ (RVM) wurde zur Beschreibung des intrinsischen Hamilton Operators bei der Coulombanregung deformierter $g - g$ Kerne angewendet. Nur Rotationen und Quadrupol - Vibrationen wurden als dominante Kollektivfreiheitsgrade betrachtet. Bezüglich der Coulombanregung von ^{238}U haben wir zwei verschiedene Modellrechnungen durchgeführt. Methode 1: Alle Zustände des RVM unterhalb der Spaltschwelle, aber nur Unterzustände mit magnetischen Quantenzahlen $M = 0$, wurden bei der Anregung berücksichtigt. Damit enthält die gekoppelte Kanalrechnung 520 Zustände. Dieses Verfahren ist jedoch nur exakt für $\theta_{\text{ion}} = 180^\circ$.

Methode 2: Nur die Grundzustandsbande und die erste β - und γ - Vibrationsbande des RVM bis zum Spin $I = 40^+$ wurden in die Rechnungen eingeschlossen. Dafür konnten alle beitragenden magnetischen Unterzustände ($M \leq 3$) berücksichtigt werden.

Die Energien der angeregten Zustände von ^{238}U nach dem RV - Modell können für die Grundzustandsbande $|1000\rangle$, erste β - Bande $|1001\rangle$ und erste γ - Bande $|1200\rangle$ aus Figur 31 entnommen werden. Bis zum Spin 28^+ sind alle geradzahligen Spinzustände eingezeichnet. Die ungeradzahligen Spinzustände werden bei Frontalstößen nicht angeregt. Die verschiedenen E2 - Übergänge mit $\Delta E > 2 m_e c^2$, die zur e^+, e^- - Paarerzeugung führen können

sind durch Pfeile angezeigt. Oktupolübergänge können vernachlässigt werden, da sie aus energetischen Gründen ($E < 2 m_e c^2$) nicht zur Paarerzeugung beitragen⁸⁶⁾. Aufgrund des großen Sommerfeld - Parameters kann die Bahn der Stoßpartner durch eine klassische Trajektorie $\vec{r}(t)$ beschrieben werden. Die Anregungswahrscheinlichkeiten P_i^{Cb} ergeben sich aus den Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger Gleichung.

$$\{H_{RV} + V_{coupl}(\vec{r}(t), \alpha_{2m})\} |\Psi\rangle = i\hbar \partial/\partial t |\Psi\rangle \quad (V.6)$$

$|\Psi\rangle$ wird entwickelt nach Eigenzuständen des Target Kerns. Man erhält gekoppelte lineare Differentialgleichungen für die Anregungsamplituden $a_i(t)$, die numerisch gelöst werden. Das Kopplungspotential $V_{coupl}(\vec{r}(t), \alpha_{2m})$ hat die Form^{87,88)}

$$V_{coupl}(\vec{r}, \alpha_{2m}) = T_2(r) \sum_{m=-2}^2 \alpha_{2m}^* Y_{2m}(\Omega) \quad (V.7)$$

wobei r der relative Abstand zwischen den beiden Kernzentren ist und α_{2m} die Quadrupol - Oberflächen Variablen⁸⁵⁾ im Laborsystem kennzeichnet.

Bei Energien nahe der Coulombbarriere müssen die Kernkräfte in Rechnung gestellt werden, da sie den Coulombkräften entgegenwirken und ihren Einfluß verringern. Als Konsequenz werden destruktive Interferenzen zwischen beiden Anregungsmoden beobachtet.

Daher enthält auch die Funktion $T_2(r)$ einen Coulomb - und einen Yukawa - Anteil⁸⁷⁾

$$T_2(r) = T_2(r)_{\text{Coul}} + T_2(r)_{\text{Yuk}} \quad (\text{V.8})$$

Betrachten wir den Frontalstoß von $^{238}\text{U} - ^{238}\text{U}$ mit $E_{\text{CM}} = 797 \text{ MeV}$, so beginnt der Einfluß der Kernkräfte bei einem Abstand von etwa $r = 19 \text{ fm}$. Bei $r = 15.1 \text{ fm}$, also gerade vor der Berührung ($R_{01} + R_{02} = 14.9 \text{ fm}$) heben sich beide Potentiale identisch auf⁷³⁾.

Anregungen in der Nähe der Coulombbarriere werden durch die Kernkräfte damit stark vermindert.

Bezüglich der e^+, e^- - Paarerzeugung benötigen wir nur die asymptotische Anregungswahrscheinlichkeit $P_i^{\text{Cb}}(t \rightarrow \infty)$; da die Zerfallszeiten der Kernniveaus ($\tau_{\text{dec}} \sim 10^{-13} \text{ sec}$) groß sind verglichen mit den Stoßzeiten der Kerne ($\tau_{\text{coll}} \sim 10^{-20} \text{ sec}$). In Spalte 1 von Tabelle 8 sind noch einmal die Übergänge aufgeschrieben, die zur Paarproduktion führen können. Spalte 2 gibt die entsprechenden Übergangsenergien an. In Spalte 3 findet man die asymptotischen

Anregungswahrscheinlichkeiten der Anfangszustände, die zwischen $2 \cdot 10^{-3}$ und $22 \cdot 10^{-3}$ variieren. Hochspinzustände werden am stärksten angeregt. Den Anregungsquerschnitt erhält man durch Multiplikation mit dem Streuquerschnitt, der unter Berücksichtigung der Modifikation des Rutherford - Querschnittes aufgrund der Anregungsenergie

berechnet wurde⁸⁹⁾. Die Verzweigungsverhältnisse aus Gleichung (V.5) für Quadrupolübergänge zwischen den Banden können aus den $B(E2)$ Werten abgeleitet werden.

$$T(E2, I_i \rightarrow I_f) = \frac{4\pi}{75} \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\hbar\omega}{\hbar c} \right)^5 B(E2, I_i \rightarrow I_f) \quad (V.9)$$

Die reduzierten Übergangswahrscheinlichkeiten $B(E2)$ sind durch die Matricelemente des kollektiven Multipoloperators Q_{LM} gegeben⁸⁵⁾

$$B(E2, I_i \rightarrow I_f) = \frac{1}{2I_i + 1} | \langle I_f || Q_L || I_i \rangle |^2 \quad (V.10)$$

In Spalte 4 von Tabelle 8 werden die numerisch berechneten Resultate für die Verzweigungsverhältnisse P_γ in ^{238}U präsentiert.

Um Paarerzeugung durch Coulombanregung zu studieren, ist es nicht unbedingt notwendig die sehr schweren Kerne zu verwenden. Es gibt leichtere, sphärische Kerne, deren erster Quadrupol - Vibrationszustand über der Paarerzeugungsschwelle von $2 m_e c^2$ liegt (siehe Tabelle 9). Diese Kerne werden durch das harmonische Quadrupol - Vibrator Modell beschrieben. Durch die großen Anregungswahrscheinlichkeiten lassen sich durchaus meßbare Paarerzeugungsquerschnitte erzielen. Die Rechnungen enthalten alle beitragenden magnetischen Unterzustände. In Spalte 1 von Tabelle 9 werden Projektil und Target des untersuchten Systems angegeben. Bei den ersten drei

Systemen betrug die Laborenergie 600 MeV, bei den nächsten beiden Systemen 180 MeV und im Pb - Pb Stoß $E_{\text{Lab}} = 1200$ MeV. Die Anregungsenergie des ersten 2^+ - Zustandes des Targetkerns findet man in Spalte 2 und in Spalte 4 den über den Schwerionenstreuwinkel θ_{ion} integrierten totalen Anregungsquerschnitt $\sigma_{\text{Cb}}^{2^+}$ in mbarn. Besonders interessant ist die symmetrische Streuung $^{208}\text{Pb} - ^{208}\text{Pb}$, da hier der erste Quadrupol - Vibrationszustand eine sehr hohe Energie (4.086 MeV) hat. Trotz der hohen Protonenzahl erhält man als maximalen differentiellen Anregungsquerschnitt nur $(d\sigma_{2^+}/d\Omega)_{\text{max}} = 6$ mb/sr. Eine ausführlichere Diskussion der nuklearen Coulombanregung und der hieraus folgenden Positronenerzeugungsrate wird in Ref. 140 gegeben.

- 3) Die Verteilung der Positronen in bezug auf ihre kinetische Energie und dem Schwerionenstreuwinkel.

Für die Konversionspositronen, folgend aus der nuklearen Coulombanregung des ersten 2^+ - Zustandes von sphärischen Kernen, wird der totale Wirkungsquerschnitt für einige leichtere Systeme in Tabelle 9 angegeben. Sie variieren zwischen 26 und 150 μb und liegen damit im experimentell meßbaren Bereich.

Die numerischen Resultate für die differentiellen und totalen symmetrisierten Wirkungsquerschnitte für Positronenerzeugung für das $^{238}_{92}\text{U} - ^{238}_{92}\text{U}$ System bei $E_{\text{CM}} = 797 \text{ MeV}$, berechnet nach Methode 1 ($M=0$), sind in Tabelle 8 zusammengefaßt. Der jeweilige Konversionskoeffizient $\beta_{E2}(\Delta E)$ für elektrische Quadrupol - Strahlung bei einem bestimmten Übergang kann der Spalte 5 entnommen werden. Ebenfalls separat wird für jeden Übergang der nach Gleichung (V.2) - (V.4) berechnete totale und differentielle Paarerzeugungsquerschnitt bei $\theta_{\text{ion}} = 180^\circ$ angegeben. Die Summation über alle Übergänge führt abschließend zu $\sigma_{\text{Cb}}^{e^+, e^-} = 125 \mu\text{b}$, verglichen mit $\sigma_{\text{ind}}^{e^+} = 500 \mu\text{b}$ durch den Zerfall des neutralen Vakuums. Speziell für $\theta_{\text{ion}} = 180^\circ$ und $\theta_{\text{ion}} = 160^\circ$ erhielten wir $d\sigma_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}/d\Omega = 3.46 \mu\text{b/sr}$ beziehungsweise $3.6 \mu\text{b/sr}$. Die untere durchgezeichnete Kurve von Figur 32 zeigt die symmetrisierte Verteilung der Positronen durch nukleare Coulombanregung als Funktion

des Schwerionenstreuwinkels θ_{ion} im Vergleich zu den spontanen und induzierten Positronen ($L_0 = 0.01$), dargelegt in der oberen durchgezeichneten Kurve⁷³⁾. Die gestrichelten Kurven zeigen dasselbe bei einer kinetischen Ionenenergie von $E_{\text{CM}} = 609 \text{ MeV}$ entsprechend $R_{\text{min}} = 20 \text{ fm}$. Hier gilt $\sigma_{\text{Cb}}^{e^+, e^-} = 89 \mu\text{b}$ und $\sigma_{\text{ind}}^{e^+, e^-} = 344 \mu\text{b}$. Bei Rückwärtsstreuung wächst der differentielle Wirkungsquerschnitt bei Erniedrigung der Ionenenergie an. Die Ursache hierfür liegt in der Abwesenheit der Kernkräfte bei $R_{\text{min}} = 20 \text{ fm}$, verglichen mit $R_{\text{min}} = 15 \text{ fm}$. Nahe der Wechselwirkungsbarriere erniedrigen die starken Interferenzen zwischen Coulomb - und Kernanregung die Paarerzeugungsrate. Daher ist es empfehlenswert bei Rückwärtsstreuung für einen optimalen experimentellen Vergleich zwischen der Positronenrate resultierend aus dem Zerfall des neutralen Vakuums und aus dem Hintergrundprozeß die kinetische Ionenenergie in der Nähe der Coulombbarriere zu wählen. Äquivalente Rechnungen wurden durchgeführt für die Systeme ${}^{238}_{92}\text{U} - {}^{250}_{98}\text{Cf}$ und ${}^{232}_{90}\text{Th} - {}^{232}_{90}\text{Th}$, wobei im ersten Fall angenommen wurde, daß der schwerere Kern in Koinzidenz mit den Positronen gemessen wird. Für $\theta_{\text{ion}} = 180^\circ$ erhielten wir $d\sigma_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}/d\Omega(\text{U-Cf}) = 3.7 \mu\text{b/sr}$, verglichen mit $d\sigma_{\text{ind}}^{e^+}/d\Omega = 13.3 \mu\text{b/sr}$ ⁹⁰⁾ und $d\sigma_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}/d\Omega(\text{Th-Th}) = 0.72 \mu\text{b/sr}$. Trotz des günstigen Verhältnisses $R = d\sigma_{\text{ind}}^{e^+}/d\sigma_{\text{Cb}}^{e^+, e^-}$ ist das U - Cf System nicht empfehlenswert für eine experimentelle Messung,

da die Spaltschwelle von Cf, berechnet innerhalb des Tröpfchenmodells⁹¹⁾, bei nur 3 MeV liegt. Die bei der Spaltung erzeugten Fragmente könnten abermals zu einer unkontrollierbaren Quelle für Hintergrund - Positronen dienen. Dagegen gewinnt man beim Th - Th Stoß bei $\theta_{\text{ion}} = 180^\circ$ für das Verhältnis R nahezu einen Faktor 5 verglichen mit dem U - U System. In jedem der untersuchten Systeme fanden wir, daß keine e^+, e^- - Paare aus der nuklearen Coulombanregung für $\theta_{\text{ion}} \ll 30^\circ$ erzeugt werden und daß die maximale kinetische Positronenenergie bei $E_{\text{kin}}^{e^+} = 0.9 \text{ MeV}$ liegt, da die Übergangsenergien in den schweren Kernen U, Cf und Th unterhalb der Spaltschwelle stets kleiner als 1.9 MeV sind. Bandenmischungen aufgrund der Rotations - Vibrations Wechselwirkung und dadurch erlaubte höhere Übergangsenergien wurden in diesen Rechnungen noch nicht berücksichtigt.

Paarerzeugung durch nukleare EO - Übergänge können vernachlässigt werden. EO - Übergänge innerhalb der Grundzustands-, β - und γ - Bande sind nur möglich durch Konversion von K - oder L - Elektronen usw., da die Energien unterhalb der Paarproduktionsschwelle liegen. Bei den höheren Banden sind EO - Übergänge stark unterdrückt im Gegensatz zu den stets erlaubten E2 - Übergängen. Weiterhin ist für $\Delta E > 2 m_e c^2$ das Verhältnis von Paarproduktion zur inneren Konversion von

K - Elektronen sehr klein, beispielsweise wurde dieses Verhältnis für einen 1.42 MeV Übergang in ^{84}Ra berechnet zu 0.006 (Ref. 92).

In Figur 33a wird der nichtsymmetrisierte Wirkungsquerschnitt in bezug auf den Schwerionenstreuwinkel aufgetragen⁸⁴⁾, der in einem Koinzidenzexperiment gemessen wird, das eine Unterscheidung von Projektil und Target erlaubt (zum Beispiel bei $^{235}\text{U} - ^{238}\text{U}$). Figur 33b gibt das entsprechende symmetrisierte Resultat für $^{238}\text{U} - ^{238}\text{U}$ an. In beiden Bildern zeigt die kurzgestrichelte Linie (Methode 1, $M=0$) und die lang gestrichelte Linie (Methode 2, $|M|>0$) die Positronen durch die nukleare Coulombanregung. Offensichtlich überdecken bei kleinen Vorwärtswinkeln die Vakuum - Zerfalls Positronen die des Hintergrunds um einige Größenordnungen. Zum Beispiel ist bei $\theta_{\text{ion}} = 20^\circ$ das Verhältnis $R = d\sigma_{\text{ind}}^{e^+}/d\sigma_{\text{Cb}}^{e^+,e^-}$ etwa $R \sim 300$ im nichtsymmetrisierten Fall und $R \sim 50$ im symmetrisierten Fall. Jedoch unterscheiden sich bei Rückwärtsstreuung ($\theta_{\text{ion}} = 180^\circ$) die Wirkungsquerschnitte nur um einen Faktor 2. Der nach Methode 2 berechnete totale Paarbildungsquerschnitt beträgt $\sigma_{\text{Cb}}^{e^+,e^-} = 228 \mu\text{b}$.

Bezogen auf die Uran - Streuung endet das Positronenspektrum aufgrund der Kern - Coulombanregung bei einer kinetischen Positronenenergie von $E_p \sim 800 \text{ keV}$, was aus Figur 34 entnommen werden kann. Die Bezeichnungen sind

die gleichen wie bei Figur 33. Hingegen enthält das induzierte Positronenspektrum noch weit höhere Energien. Dieses verschiedene Verhalten für Positronenenergien $E_p > 1 \text{ MeV}$ kann auch für eine experimentelle Unterscheidung der beiden Prozesse herangezogen werden.

4) Weitere Paarerzeugungsprozesse

Die nukleare Coulombanregung kann über innere Konversion und auch über sekundäre Prozesse zur Paarbildung führen. Die beim Zerfall von angeregten Kernniveaus entstandenen Photonen können an anderen Kernen des Targets über der Bethe - Heitler Prozeß (Kapitel VI 2) e^+, e^- - Paare erzeugen. Dies ist jedoch stark abhängig von Targetmaterialeigenschaften, wie zum Beispiel der Dichte, und kann daher am besten im Experiment durch die Verwendung verschiedener Targetmaterialien untersucht werden. Es gilt auch hier wie bei der inneren Konversion, daß die kinetische Positronenenergie auf $E_p < 800 \text{ keV}$ beschränkt ist. Im folgenden wird die Möglichkeit diskutiert, daß das Elektron gebundene Zustände im Atom besetzt. Löcher in Elektronenschalen von überkritischen Quasimolekülen erlauben die Produktion von e^+, e^- - Paaren durch den Zerfall eines angeregten Kernzustandes mit beliebiger Übergangsenergie. Dieser Prozeß wird schematisch in Figur 35 demonstriert, wo die Energie des K - Elektrons im U - U Quasimolekül als Funktion des internuklearen Abstandes r gezeigt wird. Wenn der ungefüllte gebundene Elektronenzustand in den Dirac See eingetaucht ist, kann jeder angeregte Kernzustand zerfallen durch Erzeugung eines Elektrons, daß die K - Schale besetzt, und eines Kontinuumpositrons, daß das Quasimolekül

aufgrund der Coulombabstoßung verläßt. Auch vor und nach der Tauchperiode können Photonen resultierend aus einem Kern - Quadrupolübergang von einem $(I+2)^+$ - Zustand zu einem I^+ - Zustand mit einer Wahrscheinlichkeit W_K in ein e^+, e^- - Paar konvertieren, vorausgesetzt, daß die Energiebedingung

$$\Delta E_{\text{nuc}} \geq 2 m_e c^2 - E_{\text{gebundene Elektron}} \quad (\text{V.11})$$

erfüllt ist. Prozesse, die gebundene Elektronen beinhalten hängen in der selben Weise von der Loch - Erzeugungswahrscheinlichkeit L_0 im Schwerionenstoß ab wie der spontane und induzierte Zerfall des Vakuums. Der totale Querschnitt für diesen höheren Ordnungseffekt kann leicht abgeschätzt werden

$$\sigma \approx \sum \left(\frac{d\sigma_{\text{Cb}}}{d\Omega} d\Omega P_\gamma W_K T L_0 \right) \quad (\text{V.12})$$

wobei die Summe alle Kernübergänge betrifft, die die Energiebedingung (V.11) erfüllen. Die Berechnung der totalen Quadrupol - Anregungsquerschnitte

$\int (d\sigma_{\text{Cb}}/d\Omega) d\Omega$ der Kernzustände und der Verzweungsverhältnisse P_γ geschieht wie in Kapitel V2 beschrieben.

Die obere Grenze für den Konversionskoeffizient W_K für die Erzeugung eines Positrons ins Kontinuum und eines Elektrons in einen leeren, gebundenen Zustand

wird abgeschätzt zu $W_K \leq \alpha = 1/137.03602$.

$T = \tau_{\text{coll}}/\tau_{\text{dec}} \sim 10^{-7}$ gibt das Verhältnis der Stoßzeit zur Zerfallszeit von angeregten Kernzuständen an.

Wenn wir rein dynamische Effekte ausschließen, ist dieser Prozeß damit mindestens einen Faktor 10^{-6} kleiner als innere Paarbildung in das Kontinuum und kann daher vollständig vernachlässigt werden.

Die elektronische Übergangsenergie von

$E(2p_{3/2}-1s) = 1330 \text{ keV}$ im total vereinigten

U - U Quasiatom mit $Z = 184$ erlaubt ebenfalls die

Bildung eines e^+, e^- - Paares. Aber auch dieser Prozeß ist aufgrund der gleichen Gründe ($T \sim 10^{-3}$) stark unterdrückt.

5) Ionisation durch Kern - Coulombanregung

Durch nukleare Coulombanregung kann K - Elektronen Konversion induziert werden. In den Rechnungen hat man nur β in Gleichung (V.4) zu ersetzen durch den Konversionskoeffizienten für K - Schalen Elektronen⁹³⁾. Es folgt als totaler Querschnitt $\sigma_K^{e^-} = 2.53 \text{ b}$ für das $^{235}\text{U} - ^{238}\text{U}$ System an der Coulombbarriere⁸⁴⁾. Die entsprechende K - Lochwahrscheinlichkeit als Funktion des Ionenstreuwinkels $W_K^{e^-}(\theta_{\text{ion}})$ wird in Figur 36 präsentiert. Sie erreicht ein Maximum bei $\theta_{\text{ion}} = 40^\circ$ mit $W_K = 7\%$. Im Gegensatz zur K - Lochproduktion durch quasimolekulare Effekte werden diese K - Löcher erst nach dem Stoß ($\tau_K \sim 10^{-13} \text{ sec}$) erzeugt. Als wesentliche Folgerung kann die quasimolekulare Strahlung im Experiment nicht mehr auf die K_α - Übergänge in den getrennten Atomen normiert werden, wie es für leichtere Systeme üblich ist.

Durch Mehrfachkonversion und nachfolgende Auger - Kaskaden kann im Ausgangskanal nach nuklearer Coulombanregung ein sehr hoher Ladungszustand des Ions erzeugt werden, der einerseits Rückschlüsse auf die angeregten Kernniveaus zuläßt und andererseits eventuell auch für eine experimentelle Nachbeschleunigung genutzt werden kann.

6) Das Photonenspektrum

Setzt man in Gleichung (V.2) - (V.4) den Konversionskoeffizienten gleich 1, so erhält man das Photonenspektrum aus der nuklearen Coulombanregung. Für das $^{238}\text{U} - ^{238}\text{U}$ System ist der totale Photonenerzeugungsquerschnitt für $E_{\text{CM}} = 800 \text{ MeV}$ für verschiedene Übergänge zwischen der Grundzustandsbande und der β - und γ - Vibrationsbande in Figur 37 aufgetragen⁹⁴⁾. Da keine Kaskadenrechnung durchgeführt wurde, sondern jeweils nur ein einziger Übergang betrachtet wurde, ist dies nur eine Minimalabschätzung für das zu erwartende experimentelle Resultat. Die Punkte geben sowohl die Übergangsenergie E_{γ} in keV als auch den totalen Photonenerzeugungsquerschnitt σ in barn für einen bestimmten Übergang an. Die durchgezogenen und gestrichelten Linien sollen nur das Verfolgen einer Kaskade erleichtern. Das differentielle quasimolekulare Spektrum $d\sigma/d\omega$ für L- zu K - Schalen Übergänge im U - U Stoß wurde in Ref. 51 abgeleitet ($L_0 = 0.01$). Wir haben dieses Spektrum in 50 keV - Schritt integriert und in Figur 37 eingezeichnet. Bei $E_{\gamma} \sim 600 \text{ keV}$ haben das nukleare und das quasimolekulare Spektrum noch die gleiche Größenordnung, während bei $E_{\gamma} \sim 900 \text{ keV}$ der Kern - Anteil schon etwa einen Faktor 100 größer ist. Für das total vereinigte Atom ($E_{2p_{3/2-1s}} \sim 1330 \text{ keV}$ für $Z_1 + Z_2 = 184$) ist das nukleare Photonenspektrum absolut dominant

selbst für $L_0 \sim 1$. Die Kernlinien lassen sich auch nicht beliebig scharf auflösen. Sie sind nur im Bereich ihres Maximums Gauß - förmig und haben in der Höhe von einigen Prozent des Maximums stets einen kontinuierlichen Ausläufer. Weiterhin ist jede Kernlinie etwa 200 keV unterhalb der Übergangsenergie beginnend von einem Comptonkontinuum begleitet, das minimal bei optimalen experimentellen Möglichkeiten 5% des Maximums der Kernlinie beträgt. Doppler - Effekte tragen ebenfalls zu einer Verbreiterung der Kernlinien bei.

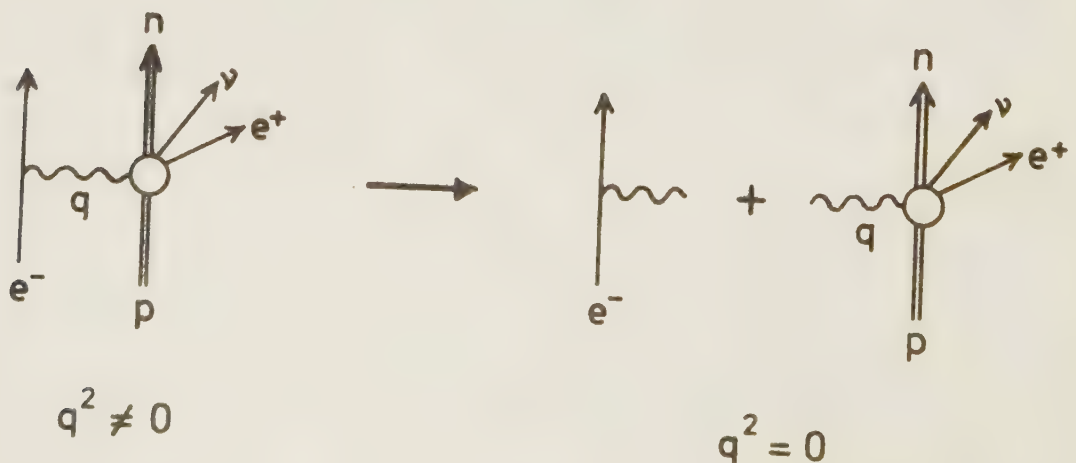
Aus den Ergebnissen, die in Figur 37 aufgezeigt sind, und aus den experimentellen Gegebenheiten muß daher der Schluß gezogen werden, daß eine quasimolekulare Spektroskopie für die sehr schweren Systeme ($Z\alpha \sim 1$) für Energien an der Coulombbarriere nicht möglich ist. Das nukleare Photonenspektrum ist dominant. Die einzige Ausnahme dürfte das $^{208}\text{Pb} - ^{208}\text{Pb}$ System aufgrund des hochliegenden ersten 2^+ - Niveaus ($E_{2^+} = 4.086 \text{ MeV}$) bilden, das möglicherweise die experimentelle Untersuchung des Quasimoleküls $Z = 164$ erlaubt.

VI Näherungsverfahren für Streuprozesse im relativistischen Bereich.

1) Die Methode der äquivalenten Photonen.

Das klassische Photonenspektrum.

Die von E. Fermi⁹⁵⁾ im Jahre 1924 entwickelte und nach Weizsäcker⁹⁶⁾ und Williams^{97,98)} benannte Methode der äquivalenten Photonen erlaubt im relativistischen Bereich eine einfache Berechnung zahlreicher Feynman Diagramme höherer Ordnung. Als Näherung wird hierbei die Tatsache ignoriert, daß bei Streuprozessen ausgetauschte Photonen nicht auf der Massenschale liegen und auch nicht unbedingt transversal polarisiert sein müssen. Dies erlaubt oftmals eine Faktorisierung des Wirkungsquerschnittes, wodurch die Ordnung des betreffenden Prozesses reduziert wird. Diese Faktorisierung wird anschaulich an der Elektrodesintegration des Protons $e^- + p \rightarrow e^- + n + \nu + e^+$ in der folgenden Figur dargestellt.



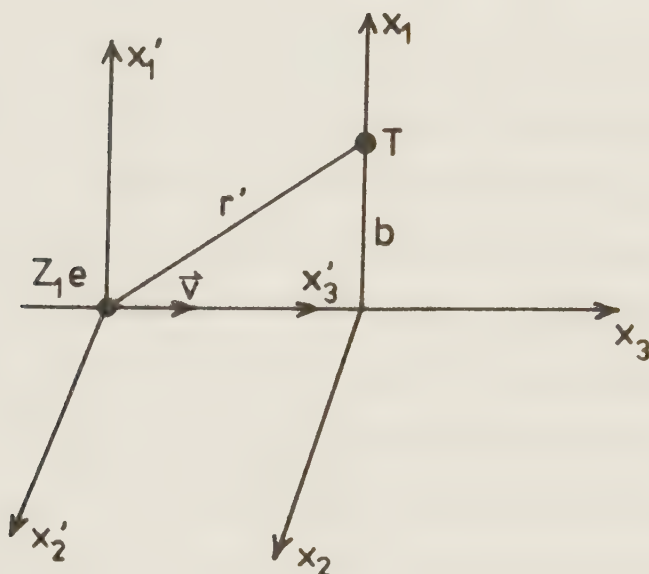
Die Anzahl $n(\omega)$ der vom Elektron emitierten Photonen kann entweder durch die Fourierintegration des klassischen elektromagnetischen Feldes⁹⁵⁾ berechnet oder quantenmechanisch aus den Feynman Regeln abgeleitet werden⁹⁹⁾.

Charakteristisch für das Photonenspektrum $n(\omega)$ ist jedoch stets ein relativ unbestimmter Abschneideparameter, der genaue Wirkungsquerschnittberechnungen nur im extrem relativistischen Bereich erlaubt. Im Zusammenhang mit innerer Anregung und Teilchenerzeugung im zeitartigen Bereich $q^2 > 0$ wurden auch Atomkerne als Generator quasireeller Photonen behandelt^{100,101)}.

Die grundlegende Annahme bei der Verwendung des klassischen Photonenspektrums ist die Äquivalenz der Wirkung des klassischen elektromagnetischen Feldes eines schnellen geladenen Teilchens auf ein festes Targetsystem verglichen mit einem Schwarm einfallender reeller Photonen, deren Wirkung sich inkohärent addiert.

Die Anzahl $n(\omega)$ äquivalenter Photonen bezogen auf ein Energieintervall $d\omega$ soll für ein sich geradlinig gleichförmig bewegendes relativistisches Teilchen bestimmt werden, das mit einem Stoßparameter b am Target T streut. In der Literatur^{95-99,102-104)} werden zahlreiche, jedoch häufig unterschiedliche Photonenspektren angegeben, woraus die Notwendigkeit einer eigenen Berechnung resultiert. Zunächst müssen

die Feldstärken $\vec{E}(t)$ und $\vec{B}(t)$ am Ort des Targets erzeugt durch das Projektil mit der Ladung $Z_1 e$ bestimmt werden (siehe nachfolgende Figur).



Das Projektilsystem K' und das Ruhesystem des Targets K sollen für $t = t' = 0$ übereinstimmen. In diesem Kapitel gebrauchen wir die Notation aus Ref. 102. Die Lorentz - Transformation der Feldstärken erfolgt durch

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma} \quad (\text{VI.1})$$

mit

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\gamma\beta \\ 0 & 0 & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \quad (\text{VI.2})$$

und dem Feldstärken Tensor

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VI.3})$$

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad \beta = v/c \quad (\text{VI.4})$$

Die transformierten Feldstärken lauten damit

$$\begin{aligned} E'_1 &= \gamma(E_1 - \beta B_2) & B'_1 &= \gamma(B_1 + \beta E_2) \\ E'_2 &= \gamma(E_2 + \beta B_1) & B'_2 &= \gamma(B_2 - \beta E_1) \\ E'_3 &= E_3 & B'_3 &= B_3 \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

Im Ruhesystem K' des Projektils ergeben sich für die Feldstärken bei $T = (b, 0, -vt')$

$$\begin{aligned} E'_1 &= \frac{Z_1 e b}{r'^3} & E'_2 &= 0 & E'_3 &= \frac{-Z_1 e v t'}{r'^3} \\ B'_1 &= 0 & B'_2 &= 0 & B'_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

mit

$$t' = \gamma(t - (v/c^2)x_3) = \gamma t \quad (\text{VI.7})$$

da $x_3 = 0$ für T im System K .

$$r' = (b^2 + (vt')^2)^{1/2} = (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{1/2} \quad (\text{VI.8})$$

Auflösen der Gleichungen (VI.5) nach den Feldstärken im Targetsystem K und einsetzen von (VI.6) führt schließlich zu

$$E_1 = \gamma E'_1 = Z_1 e b \gamma (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{-3/2} \quad (\text{VI.9})$$

$$E_3 = E'_3 = -Z_1 e \gamma v t (b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{-3/2} \quad (\text{VI.10})$$

$$B_2 = \gamma \beta E'_1 = \beta E_1 \quad (\text{VI.11})$$

Alle anderen Komponenten verschwinden.

Im folgenden Absatz soll die Frequenzabhängigkeit der Feldstärken untersucht werden. Hierzu wird $E_1(t)$, $E_3(t)$ und $B_2(t)$ Fourier - transformiert, was mit Hilfe der Substitution $x = \gamma v t / b$ und der Integraltafeln 105 und 106 analytisch durchführbar ist.

$$E_1(\omega) = \frac{Z_1 e \gamma b}{(2\pi)^{1/2} \gamma^3 v^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(b^2 / (\gamma^2 v^2) + t^2)} dt =$$

$$(2/\pi)^{1/2} \frac{Z_1 e}{b v} \frac{b \omega}{\gamma v} K_1\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \quad (\text{VI.12})$$

$$E_3(\omega) = \frac{-Z_1 e \gamma v}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\gamma^3 v^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t e^{i\omega t}}{(b^2/(\gamma^2 v^2) + t^2)^{3/2}} dt =$$

$$\frac{i Z_1 e}{\gamma v b} (2/\pi)^{1/2} \frac{\omega b}{\gamma v} K_0\left(\frac{\omega b}{\gamma v}\right) \quad (\text{VI.13})$$

$$B_2(\omega) = \beta E_1(\omega) \quad (\text{VI.14})$$

$K_1(z)$ sind die modifizierten Besselfunktionen erster Art. Die Äquivalenz der klassischen elektromagnetischen Felder mit einer Anzahl reeller Photonen $n(\omega)$ wird durch das Gleichsetzen des jeweiligen Energieflusses pro Einheitsfläche geschaffen. Für Maxwell - Felder ist der Energiefluß in Bewegungsrichtung bestimmt durch das Zeitintegral der x_3 - Komponente des Poynting - Vektors.

$$\int_0^{\infty} n(\omega) \omega d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_3} dt \quad (\text{VI.15})$$

Ausrechnen ergibt ($B = H$)

$$\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [E \times H]_z dt = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (E_1 H_2 - H_1 E_2) dt =$$

$$\frac{c\beta}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_1^2 dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{c\beta}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' E_1^*(\omega') E_1(\omega) e^{i(\omega' - \omega)t} dt = \\
 &\frac{c\beta}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_1(\omega)|^2 d\omega = \frac{c\beta}{2\pi} \int_0^{\infty} |E_1(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{VI.16})
 \end{aligned}$$

wobei die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega' - \omega)t} dt = \delta(\omega' - \omega) \quad (\text{VI.17})$$

verwendet wurde.

Für das Photonenspektrum als Funktion der Photonenenergie ω und des Stoßparameters b folgt damit

$$\begin{aligned}
 n(\omega, b) &= \frac{c}{2\pi} \frac{\beta}{\omega} |E_1(\omega, b)|^2 = \\
 &\frac{Z_1^2 e^2}{b^2 v^2} \frac{1}{\pi^2} \frac{\beta c}{\omega} \frac{\omega^2 b^2}{\gamma^2 v^2} K_1^2 \left(\frac{\omega b}{\gamma v} \right) \quad (\text{Vi.18})
 \end{aligned}$$

$n(\omega)$ zeigt also eine quadratische Abhängigkeit von der erzeugenden Ladung.

Das totale Photonenspektrum $n(\omega)$ erhält man durch Integration von $n(\omega, b)$ über alle Kreisringflächenelemente $2\pi b db$. Die obere Grenze $b_{\max} = \infty$ ist trivial, jedoch darf die untere Grenze einen minimalen Stoßparameter $b_{\min}$ nicht unterschreiten, da für $b \rightarrow 0$ die Anzahl der äquivalenten Photonen divergiert. Die Einführung dieses

Abschneideparameters ist gerechtfertigt, wenn die erzielten Resultate nur eine schwache Abhängigkeit von $b_{\min}$ zeigen. In extrem relativistischen Stößen ist der Einfluß einer Variation von $b_{\min}$ vernachlässigbar, da auch bei großen Stoßparametern hohe Fourierfrequenzen in der Bahnbewegung enthalten sind. Dagegen ist in niederenergetischen Stößen die klassische Methode der äquivalenten Photonen nicht anwendbar, da hier die Photorenzahl $n(\omega)$ eine exponentielle Abhängigkeit von $b_{\min}$ aufweist. Die Wahl des minimalen Stoßparameters bestimmt sich aus dem jeweiligen untersuchten Streuprozeß. Bei Ionisation in relativistischen Stößen entspricht $b_{\min}$ dem Schalenradius des ursprünglich im Atom gebundenen Elektrons, bei Streuungen an freien Elektronen ist es nicht sinnvoll von Stoßparametern kleiner als der Compton - Wellenlänge des Elektrons $\lambda_e = 386.1592 \text{ fm}$ zu reden. Bei elektromagnetischer Streuung an Kernen ist die geometrisch untere Grenze für b der Kernradius.

Mit Hilfe der Beziehung¹⁰⁷⁾ für Zylinderfunktionen Z_p

$$\int x (Z_p(\alpha x))^2 dx = \frac{x^2}{2} \{ (Z_p(\alpha x))^2 - Z_{p-1}(\alpha x) Z_{p+1}(\alpha x) \}$$

(VI.19)

und

$$K_p(z) = \frac{\pi i}{2} e^{i\pi p/2} H_p^{(1)}(iz) \quad (\text{VI.20})$$

wobei $H_p^{(1)}(iz)$ die Hankelfunktion erster Art der Ordnung p ist, läßt sich die geforderte Integration über den Stoßparameter analytisch durchführen. Abschließend erhalten wir für das Photonenspektrum

$$n(\omega) = \frac{2}{\pi} Z_1^2 \frac{e^2}{c} \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{\beta}{\omega} \left(\frac{-x_{\min}^2}{2} (K_1^2(x_{\min}) - K_0^2(x_{\min})) + \right. \\ \left. x_{\min} K_0(x_{\min}) K_1(x_{\min})) \right) \quad (\text{VI.21})$$

mit

$$x_{\min} = \frac{\omega_{\min}^b}{\gamma v} \quad (\text{VI.22})$$

Für $v \rightarrow c$ ist die Formel (VI.21) in den Referenzen 103 und 104 berechnet worden. Das Photonenspektrum aus Referenz 102 zeigt eine etwas andere Geschwindigkeitsabhängigkeit, jedoch verschwindet der Unterschied für $v \rightarrow c$. Näherungsausdrücke für das klassische Photonenspektrum, zumeist gültig für $\gamma \gg 1$ findet man in den Referenzen 95 - 99.

In Figur 38 ist das nach (VI.21) numerisch berechnete Photonenspektrum für ein relativistisches punktförmiges Proton ($\gamma = 200$) aufgetragen. Figur 39 zeigt $n(\omega)$ für einen Uran - Kern mit einer kinetischen Energie von 2 GeV/Nucl. beziehungsweise einer kinetischen Energie, die seiner Ruheenergie entspricht.

Für $\omega > 1$ MeV fällt das Spektrum exponentiell ab.

In den gezeigten Resultaten wurde bisher als minimaler Stoßparameter $b_{\min}$ stets die Comptonwellenlänge des Elektrons eingesetzt. Für einen $_{10}\text{Ne}$ - Kern mit einer kinetischen Energie von 2 GeV/Nucl. im Laborsystem ist $n(\omega)$ für $b_{\min} = \lambda$ und $b_{\min} = 1.87 \lambda$ in Figur 40 aufgezeichnet. $b_{\min} = \lambda$ ist hierbei relevant für die e^+, e^- - Paarerzeugung im Bereich $1 \text{ MeV} \leq \omega \leq 9 \text{ MeV}$, $b_{\min} = 1.87 \lambda \sim 720 \text{ fm}$ entspricht dem K - Schalenradius im U und wird bei entsprechenden Ionisationsrechnungen verwendet. Auffällig ist die exponentielle Abhängigkeit des Photonenspektrums von $b_{\min}$.

2) e^+, e^- - Erzeugung mit der Methode der äquivalenten Photonen.

Mit Hilfe des Photonenspektrums $n(\omega)$ (VI.21) und der Bethe - Heitler Formel kann der totale Paarerzeugungsquerschnitt im Stoß relativistischer Teilchen berechnet werden.

$$\sigma^{e^+, e^-} = \int_{2m_e}^{\omega_{\max}} n(\omega) \int_{m_e}^{\omega - m_e} \left[\frac{d\sigma(\omega)}{dE_+} \right]_{\text{BH}} dE_+ d\omega \quad (\text{VI.23})$$

Die Bethe - Heitler Formel gibt den differentiellen Querschnitt in bezug auf die Positronenenergie E_+ für die e^+, e^- - Erzeugung durch ein reelles Photon

$$q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2 = 0, \quad e_\mu q^\mu = 0 \quad (\text{VI.24})$$

an einem festen Kern Z_2 an. Der totale Querschnitt für diesen Prozeß läßt sich nicht mehr analytisch bestimmen und kann nur durch numerische Integration berechnet werden.

Es gilt^{108,109)}

$$E_+ + E_- = \omega \quad p_{\pm} = (E_{\pm}^2 - m_e^2)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{dE_+} = & Z_2^2 \alpha r_0^2 \frac{p_+ p_-}{\omega^3} \left\{ -\frac{4}{3} - 2E_+ E_- \frac{p_+^2 + p_-^2}{p_+^2 p_-^2} + \right. \\
 & m_e^2 \left(1 - E_+/p_-^3 + 1 + E_-/p_+^3 - 1 + 1 - \frac{1}{p_+ p_-} \right) + L \left[-\frac{8}{3} \frac{E_+ E_-}{p_+ p_-} \right. \\
 & + \frac{\omega^2}{p_+^3 p_-^3} (E_+^2 E_-^2 + p_+^2 p_-^2 - m_e^2 E_+ E_-) - \\
 & \left. \frac{m_e^2 \omega}{2 p_+ p_-} \left(1 + \frac{E_+ E_- - p_+^2}{p_+^3} + 1 - \frac{E_+ E_- - p_-^2}{p_-^3} \right) \right] \} \quad (VI.25)
 \end{aligned}$$

$$L = \ln \frac{E_+ E_- + p_+ p_- + m_e^2}{E_+ E_- - p_+ p_- + m_e^2} \quad l_{\pm} = \ln \frac{E_{\pm} + p_{\pm}}{E_{\pm} - p_{\pm}}$$

Hierbei wurden für die Elektronen - und Positronenwellenfunktionen ebene Wellen eingesetzt. Die Verwendung von Coulombwellen liefert selbst für $Z_2 = 82$ nur eine 10% Korrektur¹⁰⁹⁾ und kann daher vernachlässigt werden. Die obere Integrationsgrenze $\omega_{\max}$ in (VI.23) ist im Prinzip durch die kinetische Energie des Projektils gegeben. Aufgrund des exponentiellen Abfalls von $n(\omega)$ für große Frequenzen hat eine spezielle Wahl von $\omega_{\max}$ im extrem relativistischen Bereich jedoch keinen Einfluß auf den totalen Querschnitt σ^{e^+, e^-} . In Figur 41a-d ist der

differentielle Querschnitt (VI.25) in fm^2/MeV als Funktion der Positronenenergie in MeV für die Photonenenergien $\omega = 2 \text{ MeV}, 10 \text{ MeV}, 100 \text{ MeV}$ und 1 GeV aufgetragen ($Z_2 = 98$). Die Symmetrie der Spektren resultiert aus der Verwendung von ebenen Wellen. Die Coulombabstoßung würde die Maxima der Positronenverteilungen zu höheren Energien verschieben. In Figur 42 wird der integrierte Querschnitt in barn für die Photopaarernerzeugung am ${}_{98}\text{Cf}$ - Target als Funktion der Photonenfrequenz ω in MeV gezeigt. Für große Frequenzen ($\omega > 10 \text{ MeV}$) steigt der Querschnitt logarithmisch an.

Für die e^+, e^- - Produktion beim Stoß eines relativistischen Protons ($\gamma = 200$) in einer Kernemulsion mit einer effektiven Ordnungszahl von $Z_2 = 21.4$ wird der totale Querschnitt aus Gleichung (VI.23) als Funktion der oberen Integrationsgrenze ω_{max} in Figur 43 aufgetragen. Das Endergebnis von $\sigma = 25 \text{ mb}$ ist in sehr guter Übereinstimmung mit den besten theoretischen Resultaten für diesen Prozeß, abgeleitet aus Feynman Diagrammen höherer Ordnung (siehe Kapitel VII 1). Paarerzeugung im U - U Stoß wird in den Figuren 44 und 45 für $\omega_{\text{max}} = 15 \text{ MeV}$ beschrieben. In Figur 44 folgt für $\gamma = 2$ ein totaler Querschnitt von $\sigma = 0.6 \text{ barn}$. Deutlich zu erkennen ist die gute Konvergenz des Querschnittes für $\omega_{\text{max}} > 4 \text{ MeV}$. In Figur 45 wird die

Projektilgeschwindigkeit ($\gamma - 1 = (E - M)/M$) variiert.

Die starke Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnittes von der Einschußenergie ist typisch für den aufgezeigten, relativ niederenergetischen Bereich. Abschätzungen mit der Methode der äquivalenten Photonen können daher nicht mehr die Berechnung der exakten Feynman - Diagramme ersparen.

Für eine kinetische Projektilenergie von $E = 2 \text{ GeV/Nucl.}$ wird der differentielle Paarerzeugungsquerschnitt für einen $_{10}\text{Ne} - _{92}\text{U}$ Stoß als Funktion der Energie ω in MeV des äquivalenten Photons in Figur 46 gezeigt. $d\sigma/d\omega$ hat eine exponentielle Abhängigkeit, die aus dem Photonenspektrum $n(\omega)$ resultiert. Als totaler Paarerzeugungsquerschnitt folgt $\sigma = 56 \text{ mb.}$

3) K - Schalen Ionisation in relativistischen Schwerionenstößen.

Der totale Querschnitt für die K - Schalen Ionisation in relativistischen Schwerionenstößen läßt sich in zwei Anteile¹¹⁰⁾ $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ zerlegen. Ionisation bei entfernten Stößen erfolgt durch das Photonenspektrum des Projektils über den Photoeffekt

$$\sigma_1 = 2 \int_{E_K}^{\infty} n(\omega) \sigma_{\text{Phot}}(\omega) d\omega \quad (\text{VI.26})$$

mit

$$\sigma_{\text{Phot}} = \frac{84}{Z_2^2 \alpha^3} (E_K/\omega)^4 \frac{\exp(-4n \cot^{-1} n)}{(1 - e^{-2\pi n})} \text{ barn} \quad (\text{VI.27})$$

$$n = (\omega/E_K - 1)^{-1/2}$$

Hierbei ist E_K die Bindungsenergie des K - Schalen Elektrons im Target, der Faktor 2 in (VI.26) folgt aus der Besetzung des 1s - Niveaus. Im Photonenspektrum $n(\omega)$ aus (VI.21) wird als minimaler Stoßparameter der K - Schalenradius des Targetelektrons eingesetzt. Bezogen auf einen Ne - U Stoß mit einer kinetischen Projektilenergie von 2 GeV/Nucl. wird jedoch schon aus dem Photonenspektrum der Figur 40 ersichtlich, daß im Endzustand fast ausschließlich niederenergetische Elektronen vorliegen werden. Bei kleinen Stoßparametern kann die Ionisation semiklassisch behandelt werden.

Da die Projektilenergie sehr viel größer ist als die Bindungsenergie des Elektrons betrachtet man diesen Prozeß als Streuung eines freien Elektrons an einem Kern Z_2 . Bei relativistischen Energien kann diese Streuung nicht mehr durch die Rutherford - Formel beschrieben werden, sondern es ist zweckmäßig, eine in $Z_2\alpha/\beta$ mit $\beta = v/c$ linearisierte Version des Mott'schen Querschnittes zu verwenden. Diese McKinley - Feshbach Formel gibt den differentiellen Streuquerschnitt in bezug auf die übertragene kinetische Energie E_t an.

$$\frac{d\sigma}{dE_t} = 2\pi Z_2^2 r_0^2 \frac{mc^2}{\beta^2 E_t^2} \{ 1 - \beta^2 (E_t/E_{t,max}) + Z_2\alpha\beta (E_t/E_{t,max})^{1/2} (1 - (E_t/E_{t,max})^{1/2}) \} \quad (VI.28)$$

mit

$$E_t = 2mc^2 \gamma^2 \beta^2 \sin^2 \frac{1}{2}\theta = E_{t,max} \sin^2 \frac{1}{2}\theta \quad (VI.29)$$

Aus den relativistischen Stoßgesetzen¹⁰²⁾ folgt für die maximale übertragene kinetische Energie für Streuung von 2GeV/Nucl. Ne an Elektronen $E_{t,max} \sim 9$ MeV. Abschließend resultiert der totale Querschnitt

$$\sigma_2 = 2 \int_{E_K}^{E_{t,\max}} \frac{d\sigma}{dE_t} dE_t \quad (\text{VI.30})$$

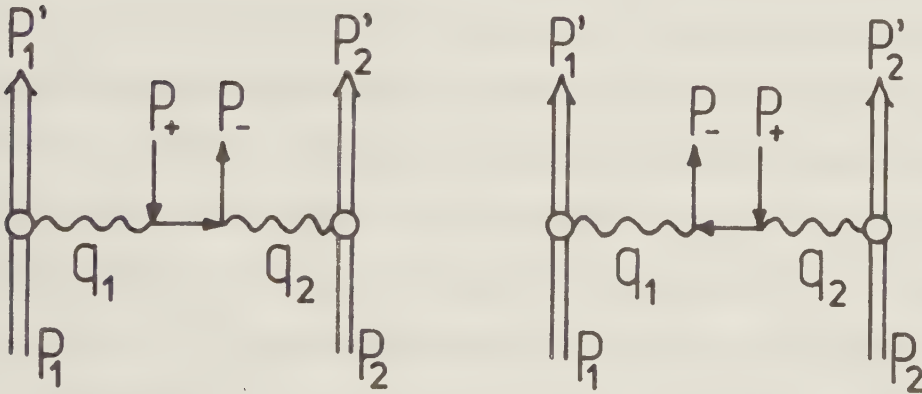
Untersuchungen der K - Loch Produktion beim Beschuß von 4.88 GeV Protonen auf Targets zwischen Nickel und Uran ergaben, daß die Summe $\sigma_1 + \sigma_2$ die gemessenen Daten sehr gut reproduzierte¹¹⁰⁾. In Figur 47 ist die Energieverteilung (VI.28) der Elektronen bei der K - Schalen Ionisation im Ne - U Stoß aufgetragen. Für den totalen Querschnitt ergab sich $\sigma_2 = 475$ barn. Etwa 1% der erzeugten Elektronen haben kinetische Energien von $E_t > 3.5$ MeV.

Diese hochenergetischen Elektronen, die beim Durchgang eines relativistischen Teilchens durch ein Target entlang des gesamten Weges herausgeschlagen werden, stellen einen wichtigen Hintergrundeffekt¹¹¹⁾ bei den Untersuchungen zur Kernfragmentation in relativistischen Schwerionenstößen dar und können daher nicht vernachlässigt werden.

VII Elektron - Positron Erzeugung im relativistischen Schwerionenstoß.

1) Historische Betrachtungen zum Zwei - Photonen Prozeß.

Im Stoß relativistischer geladener Teilchen ist der dominante Prozeß zur Elektron - Positron Paarerzeugung durch die Materialisierung zweier Photonen gegeben. Diese direkte Paarerzeugung wird durch die folgenden Feynman - Diagramme 4. Ordnung beschrieben.



Die ersten Wirkungsquerschnitte für diese e^+, e^- - Produktion als Funktion der Ladungen Z_1 und Z_2 der Stoßpartner und der Projektilenergie E_1 wurden 1934 von Landau und Lifschitz¹¹²⁾ veröffentlicht. Kurz darauf erzielten auch Oppenheimer¹¹³⁾, Stückelberg¹¹⁴⁾ und Nordheim¹¹⁵⁾ als übereinstimmendes Resultat

für $\gamma = E_1/M_1 \gg 1$

$$\sigma_{e^+, e^-} = \frac{28}{27} \frac{1}{\pi} (Z_1 Z_2 \alpha)^2 r_0^2 (\ln \gamma)^3 \quad (\text{VII.1})$$

mit dem klassischen Elektronenradius r_0 .

Aufgrund der starken Ladungsabhängigkeit ist dieser Querschnitt für eine U - U Kollision fast einen Faktor 10^8 größer verglichen mit einem Elementarteilchen - Stoß bei gleicher Geschwindigkeit. Bei der Ableitung von Formel (VII.1) wurde die äußere Feldnäherung für beide Elternteilchen verwendet. Damit konnte unter Benutzung des transversalen äquivalenten Photonenspektrums die Paarerzeugungsrate abgeschätzt werden. Formel (VII.1) liefert jedoch als Näherung nur den dominanten Anteil im extrem relativistischen Bereich. Ausführlichere Rechnungen wurden von Bhabha^{116,117)}, Nishina¹¹⁸⁾ und besonders von Racah¹¹⁹⁾ durchgeführt. Der totale Wirkungsquerschnitt σ von Racah (Formel VII.2), der meistens für den Vergleich mit experimentellen Daten herangezogen wird, enthält als führenden Term die Landau - Formel.

$$\begin{aligned} \sigma = & (Z_1 Z_2 \alpha)^2 \frac{r_0^2}{\pi} \left(\frac{28}{27} l_0^3 - \frac{178}{27} l_0^2 + \frac{370 + 7\pi^2}{27} l_0 \right. \\ & \left. - \frac{116}{9} - \frac{13}{54} \pi^2 + \frac{7}{9} \cdot 1.202057 \right) \quad (\text{VII.2}) \end{aligned}$$

mit $l_0 = \ln(2\gamma)$

In Figur 48 ist σ in kbarn für die Elektron - Positron Paarerzeugung in einem relativistischen U - U Stoß als Funktion der Ionenenergie E in GeV/Nucl. berechnet nach den Formeln (VII.1), (VII.2) und von Nishina¹¹⁸⁾ aufgetragen. Der Unterschied zwischen den verschiedenen Kurven zeigt, daß die Querschnitte nur logarithmische Genauigkeit haben. Weiterhin ist auffällig, daß die Ausdrücke von Racah und Nishina für $E < 2.5$ GeV/Nucl. beziehungsweise $E < 17$ GeV/Nucl. unphysikalisch negativ werden. Dies ist aber genau der im relativistischen Schwerionenstoß experimentell zugängliche Bereich, denn am Beschleuniger BEVALAC wird es bald möglich sein, auch U - Ionen mit Laborenergien von 2 GeV/Nucl. aneinander zu streuen. Hieraus resultiert bezüglich der direkten Paarproduktion die Notwendigkeit exakter Rechnungen, die auch für $\gamma < 10$ Gültigkeit haben. Auch neuere theoretische Untersuchungen von Murota¹²⁰⁾ und Baier¹²¹⁾, in denen die äußere Feld - Näherung für die Elternteilchen teilweise aufgehoben wird, können nicht auf diesen relativ niederenergetischen Bereich ausgedehnt werden.

Die neuesten Experimente zu dieser e^+, e^- - Produktion wurden mit 200 GeV Protonen als Projektil und einer Kernemulsion mit einer effektiven Kernordnungszahl von $Z = 21.4$ als Target durchgeführt¹²²⁻¹²⁴⁾. Das

experimentelle Resultat von $\sigma_{\text{exp}}^{e^+,e^-} \sim 7 \text{ mb}$ unterscheidet sich deutlich von den verschiedenen theoretischen Ergebnissen mit $\sigma_{\text{th}}^{e^+,e^-} \sim 26 - 100 \text{ mb}$. Auch zur Erklärung dieser Diskrepanz und der gemessenen Winkel - und Energieabhängigkeit der beteiligten Teilchen bedarf es Rechnungen ohne extrem relativistische Näherungen. In der Schwerionenstreuung ist die experimentelle Bestimmung der Paarerzeugungsquerschnitte ebenso wie beim Proton - Kern Stoß möglich, indem man als Target Kernemulsionen verwendet und aufgrund der Spurenstruktur Ereignisse resultierend aus inelastischer Kern - Kern Streuung aussondert. Ein wichtiger Hintergrundeffekt folgt bei der Kernfragmentation aus dem Dalitz - Zerfall der zahlreichen Pionen

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^- .$$

Im Schwerionenstoß kann die QED nicht nur bei hohen Energien, sondern auch für den Fall starker Felder getestet werden, sofern sich die Wirkung der Kernladung kohärent addiert. Hierbei muß jedoch auch der Einfluß der atomaren und nuklearen Formfaktoren¹²⁵⁾

berücksichtigt werden. Ist eines der Elternteilchen selber ein Elektron, so bezeichnet man die e^+, e^- - Erzeugung als Trident - Produktion

$e^- + Z \rightarrow e^- + Z + e^+ + e^-$, bei der etwa 5 - 50% der Primärenergie an das erzeugte Paar übergehen.

Eine hervorragende Übersicht über den Zwei - Photonen

Prozeß beim Elektron - Elektron Stoß wird in Ref. 126 gegeben. Die hohen Speicherringenergien ($\gamma > 1000$) erlauben es hierbei sogar über den Zwei - Photonen Prozeß, der für $E > 1$ GeV dominiert verglichen mit konkurrierenden Prozessen, auch die Produktion von Mesonen oder gar neuer Elementarteilchen zu studieren.

2) Der differentielle Wirkungsquerschnitt

In diesem Kapitel soll die Zwei - Photonen Erzeugung eines massiven Leptonenpaares im Stoß zwei geladener Teilchen, beschrieben durch die Feynman - Graphen 4.Ordnung auf Seite 107, ohne ultrarelativistische Näherung berechnet werden.

p_1 und p_2 seien hierbei die Viererimpulse der Elternteilchen im Eingangskanal, p'_1 und p'_2 die entsprechenden Impulse im Ausgangskanal. Die Impulse der virtuellen Photonen werden mit q_1 und q_2 bezeichnet, die des erzeugten Leptonenpaares mit p_+ und p_- . Aufgrund der Energie - und Impulserhaltung an den Vertizes folgt

$$q_1 = p_1 - p'_1 \quad (\text{VII.3})$$

$$q_2 = p_2 - p'_2 \quad (\text{VII.4})$$

$$q_1 + q_2 = p_+ + p_- \quad (\text{VII.5})$$

Ein Skalarprodukt von Vierervektoren kennzeichnen wir durch einen Punkt.

Die allgemeine Struktur des differentiellen Wirkungsquerschnittes ist gegeben durch¹²⁷⁾

$$d\sigma = \frac{N_i}{J_i} \sum_{s_i, s_f} \frac{|M_{fi}|^2 N_f}{(2s_1+1)(2s_2+1)} d\rho_f (2\pi)^4 \cdot \delta^4(p_1+p_2-p'_1-p'_2-p_+-p_-) \quad (\text{VII.6})$$

Die δ^4 - Funktion gewährleistet Energie - und Impulserhaltung bezüglich des Anfangs- und Endzustandes des Gesamtsystems. M_{fi} bezeichnet die Übergangsamplitude und $d\rho_f$ das Phasenvolumen der Teilchen im Ausgangskanal.

$$d\rho_f = \frac{d^3p'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_+}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_-}{(2\pi)^3} \quad (\text{VII.7})$$

Die kinematischen Normierungsfaktoren N_i und N_f ergeben sich aus der Forderung der Lorentz - Invarianz des totalen Wirkungsquerschnittes und sind daher abhängig von der Wahl der Normierung der Wellenfunktionen in der Übergangsamplitude M_{fi} . Wir bestimmen N unabhängig von der Statistik der betroffenen Teilchen zu $N = 1/2E$ (Ref. 128). Daraus folgt

$$N_i = \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \quad (\text{VII.8})$$

$$N_f = \frac{1}{2E'_1} \frac{1}{2E'_2} \frac{1}{2E_+} \frac{1}{2E_-} \quad (\text{VII.9})$$

Der Betrag des Stromes J_i der beiden einlaufenden Teilchen läßt sich schreiben als

$$J_i = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \frac{1}{E_1 E_2} ((p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2)^{1/2} \quad (\text{VII.10})$$

Dies führt zu dem invarianten Vorfaktor

$$N_i/J_i = \frac{1}{4} ((p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2)^{-1/2} \quad (\text{VII.11})$$

Weiterhin ist der Spinfreiheitsgrad der Elternteilchen zu beachten. Bei unpolarisierten Teilchen mit Spin muß der Wirkungsquerschnitt über die möglichen Spin - Orientierungen in den Anfangszuständen gemittelt und über die möglichen Spin - Endzustände summiert werden. Es folgt damit

$$\sum_{s_i, s_f} \frac{|M_{fi}|^2}{(2s_1+1)(2s_2+1)} = \frac{Z_1^2}{(2s_1+1)} \frac{Z_2^2}{(2s_2+1)} e^8 \frac{1}{q_1^4} \frac{1}{q_2^4} .$$

$$\sum_{s_i, s_f} |J_1(M_1, p_1, p'_1) J_2(M_2, p_2, p'_2) K(m, p_+, p_-, q_1, q_2)|^2 \quad (\text{VII.12})$$

wobei q_1^{-4} und q_2^{-4} die Absolutquadrate der Photonenpropagatoren sind und s_1 sowie s_2 den Spin der streuenden Teilchen mit der Ladung $Z_1 e$ beziehungsweise $Z_2 e$ angeben. J_1 und J_2 kennzeichnen die Übergangsströme

der Elternteilchen und K den Übergangstrom des erzeugten Leptonenpaares mit der Masse m. In den weiteren Rechnungen wird die Einstein'sche Summenkonvention angewendet, so daß Summenzeichen nicht mehr explizit ausgeschrieben werden. Zur eindeutigen Festlegung der Notation definieren wir das Skalarprodukt zu

$$p_1^\mu \cdot p_{2\mu} = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2 \quad (\text{VII.13})$$

und die Vertauschungsrelation der Dirac - Matrizen zu

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu} \quad (\text{VII.14})$$

mit

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{VII.15})$$

Sofern nur Dirac - Teilchen am Stoßprozeß beteiligt sind, treten nach den Feynman - Regeln die folgenden Matrixelemente auf

$$J_{1\mu} = \bar{u}(p_1') \gamma_\mu u(p_1) \quad (\text{VII.16})$$

$$J_{2\rho} = \bar{u}(p_2') \gamma_\rho u(p_2) \quad \text{VII.17)}$$

$$K^{\nu\sigma} = \bar{u}(p_-) \gamma^\nu \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma^\sigma u(-p_+) \quad (\text{VII.18})$$

mit $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$

$\bar{u}$ ist der adjungierte Dirac - Spinor $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$,

$\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$ ist bis auf Faktoren vom Absolutquadrat 1 der Propagator eines freien Dirac - Teilchens mit dem Impuls p . Die Normierungsvorschrift der Spinoren lautet

$$\bar{u}(p) u(p) = 2m \quad (\text{VII.19})$$

$$\bar{u}(-p) u(-p) = -2m \quad (\text{VII.20})$$

Unter Verwendung der Dichtematrizen¹⁰⁹⁾

$$\rho_{ik}(p) = u_i(p) \bar{u}_k(p) = \frac{1}{2} (\not{p} + m)_{ik} \quad (\text{VII.21})$$

$$\rho_{ik}(-p) = u_i(-p) \bar{u}_k(-p) = \frac{1}{2} (\not{p} - m)_{ik} \quad (\text{VII.22})$$

und der Beziehungen

$$\sum_s \bar{u}_i F_{ik} u_k \equiv \sum_s \bar{u} F u = \text{Sp}(\not{p} + m) F \quad (\text{VII.23})$$

$$|\bar{u}(p_f) F u(p_i)|^2 = (\bar{u}(p_f) F u(p_i)) (\bar{u}(i) \bar{F} u(p_f)) \quad (\text{VII.24})$$

mit $\bar{F} = \gamma^0 F^\dagger \gamma^0$

läßt sich das Quadrat der Übergangsamplitude schließlich schreiben als

$$|M_{fi}|^2 = z_1^2 z_2^2 e^8 q_1^{-4} q_2^{-4} J_{\mu\nu}(M_1, p_1, p_1')$$

$$J_{\rho\sigma}(M_2, p_2, p_2') (-) K^{\mu\rho\nu\sigma}(m, p_+, p_-, q_1, q_2) \quad (\text{VII.25})$$

mit

$$K^{\mu\rho\nu\sigma}(m, p_+, p_-, q_1, q_2) = \text{Sp}((m + \not{p}_-) L^{\mu\rho} (m - \not{p}_+) \bar{L}^{\nu\sigma}) \quad (\text{VII.26})$$

$$\bar{L}^{\nu\sigma} = \gamma^0 (L^{\nu\sigma})^+ \gamma^0 \quad (\text{VII.27})$$

$$L^{\mu\rho} = \gamma^\mu \frac{-\not{p}_+ + \not{q}_2 + m}{(-p_+ + q_2)^2 - m^2} \gamma^\rho + \gamma^\rho \frac{-\not{p}_+ + \not{q}_1 + m}{(-p_+ + q_1)^2 - m^2} \gamma^\mu \quad (\text{VII.28})$$

Die beiden Terme in $L^{\mu\rho}$ entsprechen den Propagatoren in den beiden Graphen auf Seite 107, wobei Vierer - Impulserhaltung an den Vertizes ausgenutzt wurde. In Analogie zur Streuung eines reellen Photons an einem freien Elektron bezeichnet man den Tensor vierter Stufe $K^{\mu\rho\nu\sigma}$ als Compton - Tensor. Für Spin 1/2 - Teilchen folgt weiter

$$J_{\mu\nu}(M_1, p_1, p_1') = \text{Sp}((M_1 + \not{p}_1) \gamma_\mu (M_1 + \not{p}_1') \gamma_\nu) \quad (\text{VII.29})$$

$$J_{\rho\sigma}(M_2, p_2, p_2') = \text{Sp}((M_2 + \not{p}_2) \gamma_\rho (M_2 + \not{p}_2') \gamma_\sigma) \quad \text{VII.30})$$

Genügen die Elternteilchen der Klein - Gordon Gleichung, so ergibt sich unter Vernachlässigung der

Seemöven - Graphen (Vier - Punkt Vertex) als

Prozeß höherer Ordnung der folgende Übergangstensor¹²⁷⁾

$$J_{\mu\nu}(M_1, p_1, p'_1) = (p_1 + p'_1)_\mu (p_1 + p'_1)_\nu \quad (\text{VII.31})$$

$$J_{\rho\sigma}(M_2, p_2, p'_2) = (p_2 + p'_2)_\rho (p_2 + p'_2)_\sigma \quad (\text{VII.32})$$

Alle Teilchen werden zunächst als punktförmig und strukturlos betrachtet. Der differentielle Querschnitt kann jetzt in Übereinstimmung mit Ref. 121 zusammenfassend geschrieben werden als

$$d\sigma = Z_1^2 Z_2^2 e^8 (2\pi)^{-8} (2s_1 + 1)^{-1} (2s_2 + 1)^{-1} q_1^{-4} q_2^{-4} \cdot$$

$$\frac{1}{4} ((p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2)^{-1/2} J_{\mu\nu}(M_1, p_1, p'_1) J_{\rho\sigma}(M_2, p_2, p'_2) \cdot$$

$$(-) K^{\mu\rho\nu\sigma}(m, p_+, p_-, q_1, q_2) \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2 - p_+ - p_-) \cdot$$

$$\frac{d^3 p'_1}{2E'_1} \frac{d^3 p'_2}{2E'_2} \frac{d^3 p_+}{2E_+} \frac{d^3 p_-}{2E_-} \quad (\text{VII.33})$$

Unter Beachtung der Regeln zur Berechnung von Spuren von γ - Matrizen aus Ref. 127 lassen sich die Gleichungen (VII.29) und (VII.30) leicht umformen.

$$J_{\mu\nu}(M_1, p_1, p'_1) = 4(p'_{1\mu} p_{1\nu} + p'_{1\nu} p_{1\mu} - g_{\mu\nu}(p'_1 \cdot p_1 - M_1^2)) \quad (\text{VII.34})$$

$$J_{\rho\sigma}(M_2, p_2, p'_2) = 4(p'_2{}^\rho p_{2\sigma} + p'_2{}^\sigma p_{2\rho} - g_{\rho\sigma}(p'_2 \cdot p_2 - M_2^2))$$

(VII.35)

Aufgrund der Unabhängigkeit der Reihenfolge dieser Übergangstensoren im differentiellen Wirkungsquerschnitt ist der Comptontensor $K^{\mu\rho\nu\sigma}$ symmetrisch in μ und ν als auch in ρ und σ .

$$K^{\mu\rho\nu\sigma} = K^{\nu\sigma\mu\rho}$$

(VII.36)

Das Integral des Comptontensors über die Endzustände der erzeugten Teilchen unter Berücksichtigung der Vierer - Impuls Erhaltung wurde bereits mehrfach berechnet¹²⁹⁻¹³²⁾.

$$B^{\mu\rho\nu\sigma} = \int K^{\mu\rho\nu\sigma} \delta(p_+ + p_- - q_1 - q_2) \frac{d^3 p_+}{E_+} \frac{d^3 p_-}{E_-} \quad (\text{VII.37})$$

Aufgrund der Eichinvarianzbedingungen für die Übergangstensoren der Elternteilchen

$$J_{1\mu\nu} q_1^\mu = J_{1\mu\nu} q_1^\nu = J_{2\rho\sigma} q_2^\rho = J_{2\rho\sigma} q_2^\sigma = 0$$

(VII.38)

läßt sich $B^{\mu\rho\nu\sigma}$ als Linearkombination von nur acht Termen darstellen.

Weiterhin führen wir die folgenden Abkürzungen ein

$$v = q_1 \cdot q_2 = (W^2 - q_1^2 - q_2^2)/2 \quad (\text{VII.39})$$

W wird als die invariante Masse des erzeugten Systems bezeichnet und ist definiert durch

$$W^2 = (q_1 + q_2)^2 = (p_+ + p_-)^2 \quad (\text{VII.40})$$

Im Schwerpunktsystem des erzeugten Paares entspricht W der Gesamtenergie der beiden Teilchen.

Weiterhin gilt

$$D = (q_1 \cdot q_2)^2 - q_1^2 q_2^2 \quad (\text{VII.41})$$

$$\beta = ((W^2 - 4m^2)/W^2)^{1/2} \quad (\text{VII.42})$$

Um einige Druckfehler¹³⁰⁻¹³²⁾ in Ref. 129 zu korrigieren, wird der Comptontensor $B^{\mu\rho\nu\sigma}$ im Anhang B^{neu} explizit aufgeschrieben.

Für $W \rightarrow W_{\min} = 2 m_e$ geht der Comptontensor und somit auch der differentieller Wirkungsquerschnitt gegen Null.

$$d\sigma(W \rightarrow W_{\min}) \sim \beta \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \rightarrow 0$$

Mit Hilfe der Substitution $m_e \rightarrow m_\mu$ kann auch die Myonenpaarproduktion in relativistischen Stößen berechnet werden.

Sofern die einfliegenden Teilchen der Klein - Gordon Gleichung genügen, lassen sich die einzelnen Tensoren leicht ausmultiplizieren. Als Resultat erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= - z_1^2 z_2^2 e^8 (2\pi)^{-8} \frac{1}{16} ((p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2)^{-1/2} q_1^{-4} q_2^{-4} \cdot \\
 &2\pi\beta \{ (d_1 + d_3)((p_1 + p'_1) \cdot (p_2 + p'_2))^2 + d_2(p_2 + p'_2)^2(p_1 + p'_1)^2 \\
 &+ d_4/D (p_1 + p'_1)^2(q_1 \cdot (p_2 + p'_2))^2 \\
 &+ d_5/D (p_2 + p'_2)^2(q_2 \cdot (p_1 + p'_1))^2 + \\
 &\frac{2(d_6 + d_7)}{vD} ((p_1 + p'_1) \cdot (p_2 + p'_2)) (q_1 \cdot (p_2 + p'_2)) (q_2 \cdot (p_1 + p'_1)) \\
 &+ d_8/D^2 (q_1 \cdot (p_2 + p'_2))^2 (q_2 \cdot (p_1 + p'_1))^2 \} \frac{d^3 p'_1}{2E'_1} \frac{d^3 p'_2}{2E'_2}
 \end{aligned}$$

(VII.43)

Die Koeffizienten $d_1 - d_8$ sind im Anhang B definiert.

Hierbei gilt

$$p_1 + p'_1 = 2p_1 - q_1 \quad (\text{VII.44})$$

$$p_2 + p'_2 = 2p_2 - q_2 \quad (\text{VII.45})$$

$$2p_1 \cdot p'_1 = 2M_1^2 - 2p_1 \cdot q_1 \quad (\text{VII.46})$$

$$2p_2 \cdot p'_2 = 2M_2^2 - 2p_2 \cdot q_2 \quad (\text{VII.47})$$

sowie

$$(p_2 - q_2)^2 = p_2^2 + q_2^2 - 2p_2 \cdot q_2 \quad (\text{VII.48})$$

Jetzt kann ausgenutzt werden, daß sich die Teilchen im Anfangs- und Endkanal auf der Massenschale befinden.

$$p_2^2 = M_2^2 \quad (\text{VII.49})$$

$$p_2'^2 = M_2^2 \quad (\text{VII.50})$$

Daraus folgt

$$q_2^2 = 2p_2 \cdot q_2 \quad (\text{VII.51})$$

und analog

$$q_1^2 = 2p_1 \cdot q_1 \quad (\text{VII.52})$$

Mit

$$u_1 = 2p_1 \cdot q_2 \quad (\text{VII.53})$$

und

$$u_2 = 2p_2 \cdot q_1 \quad (\text{VII.54})$$

läßt sich der differentielle Querschnitt noch weiter umformen.

Aufgrund der starken Abhängigkeit von den Ordnungszahlen der Elternteilchen ist dieser Querschnitt bezogen auf die Uran - Uran Streuung fast einen Faktor 10^8 größer als bei einem vergleichbaren Stoß von Elementarteilchen.

$$d\sigma = - z_1^2 z_2^2 e^8 (2\pi)^{-8/16} ((p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2)^{-1/2} q_1^{-4} q_2^{-4} .$$

$$2\pi B \{ (d_1 + d_3) ((4(p_1 \cdot p_2)^2 + v)^2 + u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2$$

$$- 2u_1 (4(p_1 \cdot p_2) + v) - 2u_2 (4(p_1 \cdot p_2) + v)) +$$

$$d_2 (4M_1^2 - q_1^2) (4M_2^2 - q_2^2) +$$

$$d_4/D (4M_1^2 - q_1^2) (u_2^2 - 2vu_2 + v^2) +$$

$$d_5/D (4M_2^2 - q_2^2) (u_1^2 - 2vu_1 + v^2) +$$

$$\frac{2(d_6 + d_7)}{vD} ((4(p_1 \cdot p_2) + v)(u_1 u_2 + v^2 - vu_2 - vu_1) - u_1^2 u_2$$

$$- u_2^2 u_1 - v^2 u_1 - v^2 u_2 + vu_1^2 + vu_2^2 + 2vu_1 u_2) +$$

$$d_8/D^2 (u_2^2 u_1^2 - 2vu_1 u_2^2 + v^2 u_2^2 - 2vu_1^2 u_2 + 4v^2 u_1 u_2 - 2v^3 u_2 +$$

$$v^2 u_1^2 - 2v^3 u_1 + v^4) \} \frac{d^3 p_1'}{2E_1'} \frac{d^3 p_2'}{2E_2'} \quad (\text{VII.55})$$

Aus der Beziehung (VII.55) erkennt man sofort, daß $d\sigma \sim q^{-8}$ für $q^2 = q_1^2 = q_2^2$. Für Photonen weit abseits der Massenschale ist somit der differentieller Wirkungsquerschnitt vernachlässigbar gering, so daß nur ein kleiner Bereich des Phasenvolumens einen Beitrag zum totalen Querschnitt liefert. Zwei - Photonen Paarerzeugung ist somit ein peripherer Prozeß bezüglich der invarianten Impulsüberträge.

3) Paarerzeugung durch virtuelle Photonen.

Mit Hilfe des Comptontensors (Anhang B) kann die Leptonenpaarerzeugung durch virtuelle Photonen untersucht werden. Reelle Photonen werden als massenlos angenommen.

$$q^2(\text{reelles Photon}) = 0$$

Hieraus folgt, daß sie transversal polarisiert sind und die Lorentzbedingung $e \cdot q = 0$ erfüllen, wobei e den Viererpolarisationsvektor kennzeichnet. Als wesentliches Merkmal befinden sich virtuelle Photonen hingegen nicht auf der Massenschale.

$$q^2(\text{virtuelles Photon}) \neq 0$$

Bei lorentzinvarianter Rechnung hat der Polarisationsvektor für virtuelle Photonen auch eine Komponente in Ausbreitungsrichtung des Photons $e_3 = \vec{q}/|\vec{q}|$ (longitudinales Photon) und eine Nullkomponente e_0 (zeitartig polarisiertes oder skalaras Photon). Beim Übergang auf die Massenschale $q^2 \rightarrow 0$ heben sich diese beiden Komponenten identisch auf¹³³.

Bezüglich der Helizität λ , definiert als Projektion des Spins in Ausbreitungsrichtung, treten äquivalente Unterschiede zwischen reellen und virtuellen Photonen auf. Ein Teilchen mit dem Spin s kann $2s + 1$ Helizitätszustände besetzen. Für ein massenloses und damit reelles Photon sind jedoch nur die Helizitäten $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ erlaubt, dies entspricht den transversalen

Polarisationszuständen. Ein massenloses Photon ist notwendigerweise transversal, aber nicht umgekehrt. Ein virtuelles Photon kann jedoch auch die Helizität $\lambda = 0$ aufweisen, was einem Zustand mit skalarer und longitudinaler Polarisation zugeordnet wird.

Für $q^2 = |q_1^2| = |q_2^2| = 0$ muß sich aus dem Comptontensor der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von Diracteilchen durch zwei reelle Photonen ergeben.

$\gamma_1 + \gamma_2 \rightarrow e^- + e^+$
Als Resultat erhält man¹²⁹⁾

$$\sigma_{\gamma\gamma} = -2\pi e^4 \beta / W^2 (d_1^0 + 2d_2^0 + d_3^0) \quad (\text{VII.56})$$

Dieser Querschnitt ist in Übereinstimmung mit dem Resultat aus Ref. 12, das aus den üblichen Feynman - Regeln abgeleitet wurde. Explizit ausgeschrieben folgt für $\sigma_{\gamma\gamma}$ ^{12,126)} als Funktion der invarianten Masse W des erzeugten Systems

$$\sigma_{\gamma\gamma} = 4\pi r_0^2 m_e^2 / W^2 ((1 + 4m^2/W^2 - 8m^4/W^4)L - (1/W^2 + 4m^2/W^4)\Delta t)$$

mit (VII.57)

$$\Delta t = W^2(1 - 4m^2/W^2)^{1/2}$$

$$L = 2 \ln(W/(2m) + (\frac{W^2}{4m^2} - 1)^{1/2}) \quad (\text{VII.58})$$

r_0 ist der klassische Elektronenradius: $r_0 = 2.817939 \text{ fm}$

Der Querschnitt (VII.57) ist in Figur 49a als Funktion von W^2 aufgetragen. Im Schwerpunktsystem eines erzeugten e^+, e^- - Paares gilt

$$W^2 = 4 E_+^2 = 4 E_-^2 \quad (\text{VII.59})$$

Unter Verwendung des Comptontensors (Anhang B) sind die Paarerzeugungsquerschnitte durch virtuelle Photonen in der Helizitätsbasis in den Referenzen 126 und 134 berechnet worden.

$$\gamma_1^* + \gamma_2^* \rightarrow e^+ + e^-$$

Die Querschnitte σ_{TT} , σ_{TS} und σ_{SS} sind im Anhang C aufgeführt. Der Index T kennzeichnet hierbei die transversale Polarisation (Helizität $\lambda = \pm 1$), der Index S die skalare und longitudinale Polarisation (Helizität $\lambda = 0$) des Photons 1 beziehungsweise 2. Man erkennt sofort, daß für $q^2 = |q_1^2| = |q_2^2|$ und $q^2 \rightarrow 0$ nur σ_{TT} von Null verschieden ist. Es gilt $\sigma_{TT}(q^2 \rightarrow 0) = \sigma_{\gamma\gamma}$. Die Paarerzeugung durch virtuelle Photonen liefert also im Grenzfall $q^2 \rightarrow 0$ den Querschnitt für Teilchenerzeugung durch reelle und somit transversal polarisierte Photonen. Die Wirkungsquerschnitte (Anhang C) für e^+, e^- - Produktion sind in den Figuren 49b-d als Funktion von W^2 aufgemalt für $q^2 = 10^{-3} \text{ MeV}^2$, 1 MeV^2 und 10^3 MeV^2 . Für $q^2 = 10^{-3} \text{ MeV}^2$ ist der Unterschied von σ_{TT} und $\sigma_{\gamma\gamma}$ vernachlässigbar gering. Weiterhin ist für $q^2 < 0.01 \text{ MeV}^2$ σ_{TT} absolut dominant, das heißt mindestens drei Größenordnungen

größer als die anderen Querschnitte. Erst für $q^2 \gg 1 \text{ MeV}^2$ liefert σ_{TS} und σ_{SS} mit σ_{TT} vergleichbare Werte. Für $q^2 < 10 \text{ MeV}^2$ zeigen alle Querschnitte ein Maximum im Bereich $W_{\min}^2 = 4 m_e^2 < W^2 < 10 \text{ MeV}^2$. Die quantenmechanische Methode der äquivalenten Photonen nutzt die Dominanz von σ_{TT} für kleine q^2 aus, indem man virtuelle Photonen durch reelle ersetzt, das heißt $\sigma_{TT} \rightarrow \sigma_{\gamma\gamma}$ während σ_{TS} , σ_{ST} , σ_{SS} und die ebenfalls im Comptontensor enthaltenen Interferenzterme zwischen Photon 1 und 2 vernachlässigt werden.

4) Phasenraumtransformation

Um die Integration über das Phasenraumvolumen $dV = d^3p'_1 d^3p'_2$ in (VII.55) ausführen zu können, ist es zweckmäßig mittels einer Jacobi - Transformation von geometrischen Variablen auf invariante Variablen zu transformieren. Dieses Verfahren bietet drei wesentliche Vorteile

- 1) Der differentielle Querschnitt ist unabhängig von einem speziellen Bezugssystem. Er kann aber leicht in beliebige geometrische Variablen transformiert werden.
- 2) Die Wahl der invarianten Variablen erlaubt es, einen Teil der Integrationen analytisch durchzuführen.
- 3) Nur ein geringer Teil des Phasenraumvolumens trägt zum totalen Querschnitt wesentlich bei. Numerische Integrationen in diesem Bereich werden durch die Wahl invarianter Variablen vereinfacht.

Zunächst werden die Integrationsvariablen im Laborsystem ausgedrückt

$$p_2 = (M_2, 0, 0, 0) \quad (\text{VII.59})$$

$$p_1 = (E_1, 0, 0, P_1) \quad (\text{VII.60})$$

$$p'_1 = (E'_1, P'_1 \sin \theta'_1, 0, P'_1 \cos \theta'_1) \quad (\text{VII.61})$$

$$p'_2 = (E'_2, P'_2 \sin \theta'_2 \cos \phi'_2, P'_2 \sin \theta'_2 \sin \phi'_2, P'_2 \cos \theta'_2) \quad (\text{VII.62})$$

mit

$$P_i = (E_i^2 - M_i^2)^{1/2}$$

Daraus folgt

$$q_1 = (p_1 - p'_1) = (E_1 - E'_1, -P'_1 \sin\theta'_1, 0, P_1 - P'_1 \cos\theta'_1) \quad (\text{VII.63})$$

$$q_2 = (p_2 - p'_2) = (M_2 - E'_2, -P'_2 \sin\theta'_2 \cos\phi'_2, -P'_2 \sin\theta'_2 \sin\phi'_2, -P'_2 \cos\theta'_2) \quad (\text{VII.64})$$

$$q_1^2 = 2M_1^2 - 2p_1 \cdot p'_1 = 2M_1^2 - 2E_1 E'_1 + 2P_1 P'_1 \cos\theta'_1 \quad (\text{VII.65})$$

$$q_2^2 = 2M_2^2 - 2p_2 \cdot p'_2 = 2M_2^2 - 2E'_2 M_2 \quad (\text{VII.66})$$

$$\begin{aligned} W^2 &= (q_1 + q_2)^2 = q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 \cdot q_2 = \\ &2M_1^2 - 2E_1 E'_1 + 2P_1 P'_1 \cos\theta'_1 + 2M_2^2 - 2E'_2 M_2 + \\ &2((E_1 - E'_1)(M_2 - E'_2) - P'_1 P'_2 \sin\theta'_1 \sin\theta'_2 \cos\phi'_2 + \\ &(P_1 - P'_1 \cos\theta'_1)P'_2 \cos\theta'_2) \quad (\text{VII.67}) \end{aligned}$$

$$u_1 = 2(E_1(M_2 - E'_2) + P_1 P'_2 \cos\theta'_2) \quad (\text{VII.68})$$

$$u_2 = 2M_2(E_1 - E'_1) \quad (\text{VII.69})$$

Die Invarianten W^2 , u_1 und u_2 sind positiv definit, die Impulsquadrate der virtuellen Photonen dagegen sind stets negativ, was sich zum Beispiel leicht aus Gleichung (VII.66) erkennen läßt. Bei der Zwei - Photonen Paarerzeugung sind die Impulse der virtuellen Photonen

damit raumartig.

$$q_1^2 < 0$$

$$q_2^2 < 0$$

Bei der Paarerzeugung durch virtuelle Bremsstrahlungsphotonen dagegen ist der Photonenimpuls k zeitartig.

Hier gilt im Schwerpunktsystem des erzeugten Paares

$$k^2 = (p_+ + p_-)^2 = (E_+ + E_-)^2 > 0 \quad (\text{VII.70})$$

Ausgedrückt in Laborsystem - Variablen läßt sich das Phasenvolumen schreiben als

$$\frac{d^3 p'_1}{E'_1} \frac{d^3 p'_2}{E'_2} = P'_1 \sin \theta'_1 P'_2 \sin \theta'_2 dE'_1 dE'_2 d\theta'_1 d\theta'_2 d\phi'_2 d\phi'_1 \quad (\text{VII.71})$$

wobei ausgenutzt wurde

$$P dP = E dE \quad (\text{VII.72})$$

Die Integration um den Azimuthwinkel ϕ'_1 entspricht einer Rotation des Gesamtsystems und liefert daher nur einen Faktor 2π . Es verbleibt die Aufgabe die Laborsystemvariablen E'_1 , E'_2 , θ'_1 , θ'_2 und ϕ'_2 zu transformieren in die Invarianten W^2 , u_1 , u_2 , q_1^2 , und q_2^2 . Die Jacobi - Transformation lautet allgemein

$$dx_1 \dots dx_n = \left| \frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)} \right| dy_1 \dots dy_n = D dy_1 \dots dy_n \quad (\text{VII.73})$$

mit

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (\text{VII.74})$$

Für unsere spezielle Transformation folgt für D nach einigen Umformungen

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial E'_1} & 0 & 0 & \frac{\partial q_1^2}{\partial E'_1} & \frac{\partial W^2}{\partial E'_1} \\ 0 & \frac{\partial q_2^2}{\partial E'_2} & \frac{\partial u_1}{\partial E'_2} & 0 & \frac{\partial W^2}{\partial E'_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial q_1^2}{\partial \theta'_1} & \frac{\partial W^2}{\partial \theta'_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial \theta'_2} & 0 & \frac{\partial W^2}{\partial \theta'_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial W^2}{\partial \phi'_2} \end{vmatrix} \quad (\text{VII.75})$$

Hierbei gilt

$$\frac{\partial q_1^2}{\partial E'_1} = -2E_1 - 2P_1/P'_1 \cos \theta'_1 E'_1 \quad (\text{VII.76})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^2}{\partial E'_1} = & -2E_1 - 2P_1/P'_1 \cos\theta'_1 E'_1 - 2M_2 + 2E'_2 + \\ & 2P'_2 E'_1/P'_1 \sin\theta'_1 \sin\theta'_2 \cos\phi'_2 + 2E'_1/P'_1 \cos\theta'_1 \cos\theta'_2 P'_2 \end{aligned} \quad (\text{VII.77})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial E'_1} = -2M_2 \quad (\text{VII.78})$$

$$\frac{\partial q_2^2}{\partial E'_2} = -2M_2 \quad (\text{VII.79})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^2}{\partial E'_2} = & -2M_2 - 2E_1 + 2E'_1 + 2P'_1 E'_2/P'_2 \sin\theta'_1 \sin\theta'_2 \cos\phi'_2 - \\ & 2(P_1 - P'_1 \cos\theta'_1) \cos\theta'_2 E'_2/P'_2 \end{aligned} \quad (\text{VII.80})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial E'_2} = -2E_1 - 2P_1 E'_2/P'_2 \cos\theta'_2 \quad (\text{VII.81})$$

$$\frac{\partial q_1^2}{\partial \theta'_1} = 2P_1 P'_1 \sin\theta'_1 \quad (\text{VII.82})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^2}{\partial \theta'_1} = & -2P_1 P'_1 \sin\theta'_1 - 2P'_1 P'_2 \cos\theta'_1 \sin\theta'_2 \cos\phi'_2 + \\ & 2P'_1 P'_2 \sin\theta'_1 \cos\theta'_2 \end{aligned} \quad (\text{VII.83})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \theta'_2} = -2P_1 P'_2 \sin\theta'_2 \quad (\text{VII.84})$$

$$\frac{\partial W^2}{\partial \theta_2'} = -2P_1' P_2' \sin \theta_1' \cos \theta_2' \cos \phi_2' -$$

$$2(P_1 - P_1' \cos \theta_1') P_2' \sin \theta_2' \quad (\text{VII.85})$$

$$\frac{\partial W^2}{\partial \phi_2'} = 2P_1' P_2' \sin \theta_1' \sin \theta_2' \sin \phi_2' \quad (\text{VII.86})$$

Die Entwicklung der Jacobi - Determinante D liefert

$$D = \frac{\partial u_2}{\partial E_1'} \frac{\partial q_2^2}{\partial E_2'} \frac{\partial q_1^2}{\partial \theta_1'} \frac{\partial u_1}{\partial \theta_2'} \frac{\partial W^2}{\partial \phi_2'} \quad (\text{VII.87})$$

Einsetzen ergibt

$$dq_1^2 dq_2^2 du_1 du_2 dW^2 = P_1' P_2' \sin \theta_1' \sin \theta_2' 32 M_2^2 P_1^2 P_1' P_2' \cdot$$

$$\sin \theta_1' \sin \theta_2' \sin \phi_2' dE_1' dE_2' d\theta_1' d\theta_2' d\phi_2' \quad (\text{VII.88})$$

Die geometrischen Variablen müssen jetzt noch durch

Invariante ausgedrückt werden.

Mit Hilfe von Gleichung (VII.67) läßt sich $\sin \phi_2'$ schreiben als

$$\sin \phi_2' = \{ P_1'^2 P_2'^2 \sin^2 \theta_1' \sin^2 \theta_2' - ((W^2 - q_1^2 - q_2^2)/2$$

$$- (E_1 - E_1')(M_2 - E_2') - (P_1 - P_1' \cos \theta_1') P_2' \cos \theta_2')^2 \}^{1/2} /$$

$$(P_1'^2 P_2'^2 \sin^2 \theta_1' \sin^2 \theta_2') = F / (P_1'^2 P_2'^2 \sin^2 \theta_1' \sin^2 \theta_2') \quad (\text{VII.89})$$

Unter Verwendung der ersten Mandelstam'schen Variablen kann auch die Einschußenergie des Projektils invariant ausgedrückt werden

$$s = (p_1 + p_2)^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2M_2 E_1 \quad (\text{VII.90})$$

Durch Auflösen folgt

$$E_1 = \frac{s - M_1^2 - M_2^2}{2M_2} \quad (\text{VII.91})$$

Nach zahlreichen Umformungen läßt sich auch die Funktion F in (VII.89) allein durch die gewählten invarianten Variablen ausdrücken.

$$F = \frac{1}{4P_1 M_2} (-u_1^2 u_2^2 + \delta u_1 u_2 + \epsilon u_1^2 + \phi u_2^2 + \xi u_1 + \omega u_2 + \sigma)^{1/2} = \frac{1}{4P_1 M_2} G^{1/2} \quad (\text{VII.92})$$

mit

$$\delta = 4 M_2 E_1 (W^2 - q_1^2 - q_2^2) + 2 q_1^2 q_2^2 \quad (\text{VII.93})$$

$$\epsilon = 4 M_2^2 q_1^2 \quad (\text{VII.94})$$

$$\phi = 4 M_1^2 q_2^2 \quad (\text{VII.95})$$

$$\xi = -4 M_2^2 q_1^2 (W^2 - q_1^2 - q_2^2) - 8 M_2 E_1 q_1^2 q_2^2 \quad (\text{VII.96})$$

$$\omega = -4 M_1^2 q_2^2 (W^2 - q_1^2 - q_2^2) - 8 M_2 E_1 q_1^2 q_2^2 \quad (\text{VII.97})$$

$$\begin{aligned} \sigma = & -4 P_1^2 M_2^2 (W^2 - q_1^2 - q_2^2)^2 + 4 M_2 E_1 q_1^2 q_2^2 (W^2 - q_1^2 - q_2^2) \\ & - q_1^4 q_2^4 + 4 M_1^2 q_1^2 q_2^4 + 4 M_2^2 q_1^4 q_2^2 + 16 M_2^2 P_1^2 q_1^2 q_2^2 \end{aligned} \quad (\text{VII.98})$$

Zusammengefaßt erhalten wird die Transformation

$$\begin{aligned} \frac{d^3 p'_1}{E'_1} \frac{d^3 p'_2}{E'_2} &= P'_1 P'_2 \sin \theta'_1 \sin \theta'_2 dE'_1 dE'_2 d\theta'_1 d\theta'_2 d\phi'_1 d\phi'_2 \\ \Rightarrow & \frac{2\pi du_1 du_2 dq_1^2 dq_2^2 dW^2}{8P_1 M_2 (-u_1^2 u_2^2 + \delta u_1 u_2 + \epsilon u_1^2 + \phi u_2^2 + \xi u_1 + \omega u_2 + \sigma)^{1/2}} \quad (\text{VII.99}) \end{aligned}$$

Für den Spezialfall $M = M_1 = M_2$ wurde das Phasenraumvolumen (VII.99) bereits in Ref. 135 abgeleitet. Jedoch zeigt sich, daß unser Resultat um einen Faktor 2 kleiner ist als das in Gleichung (32) von Ref. 135 angegebene Ergebnis.

5) Analytische Integration des differentiellen Wirkungsquerschnittes und Bestimmung der Integralgrenzen.

Der physikalische Bereich für einen differentiellen Wirkungsquerschnitt in invarianten Variablen ergibt sich allgemein durch die Nullstellen von Gram'schen Determinanten Δ^{136}). Die Integralgrenzen in unserem Spezialfall werden daher bestimmt durch

$$\Delta(u_1, u_2, q_1^2, q_2^2, W^2) = G = 0 \quad (\text{VII.100})$$

Die Funktion G ist nach Gleichung (VII.92) ein quadratisches Polynom in u_1 und u_2 . Die Integralgrenzen von u_1 lassen sich daher leicht berechnen

$$u_1^{\pm} = \frac{1}{2A} (-B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}) \quad (\text{VII.101})$$

$$A = -u_2^2 + \epsilon \quad (\text{VII.102})$$

$$B = \delta u_2 + \xi \quad (\text{VII.103})$$

$$C = \phi u_2^2 + \omega u_2 + \sigma \quad (\text{VII.104})$$

Die Integralgrenzen von u_1 bedeuten in geometrischen Variablen ausgedrückt, daß $\cos^2 \phi'_2 = 1$ gesetzt wird.

Um einen totalen Wirkungsquerschnitt zu erhalten, müssen

nach Gleichung (VII.55) und (VII.99) zunächst die folgenden Integrationen durchgeführt werden

$$L_{ab} = \int_{u_2^-}^{u_2^+} \int_{u_1^-}^{u_1^+} \frac{u_1^a u_2^b du_1 du_2}{(-u_1^2 u_2^2 + \delta u_1 u_2 + \epsilon u_1^2 + \phi u_2^2 + \xi u_1 + \omega u_2 + \sigma)^{1/2}} \quad (\text{VII.105})$$

wobei a und b die Werte 0, 1 und 2 annehmen können.

Die Integrale L_{ab} können mit Hilfe der Integraltafeln 137 und 138 analytisch ausgewertet werden. Die explizite Berechnung von L_{ab} wird im Anhang D durchgeführt. Eine nützliche Probe für die Richtigkeit dieser Integrationen ist die Untersuchung der Symmetrie von L_{01} und L_{10} , L_{02} und L_{20} sowie L_{12} und L_{21} für $M_1 = M_2$ und $q_1 = q_2$. Eine numerische Untersuchung bestätigte diese Symmetrie.

Die Integralgrenzen der äußeren Integration in $W^2 = (p_+ + p_-)^2$ lassen sich ebenfalls noch analytisch ableiten.

$$W_{\min}^2 = (p_{+, \min} + p_{-, \min})^2 = 4m^2 \quad (\text{VII.106})$$

Das Maximum der effektiven Masse des erzeugten Leptonenpaares errechnet man aus der Differenz der effektiven Masse des Gesamtsystems im Eingangskanal und der Ruhemassen der einfliegenden Teilchen. Dieses Maximum wird erreicht, wenn die gesamte kinetische Energie in die Leptonenerzeugung umgesetzt wird

$$W_{\max}^2 = (\sqrt{s} - M_1 - M_2)^2 = (\sqrt{(p_1 + p_2)^2} - M_1 - M_2)^2 \quad (\text{VII.107})$$

Dagegen können die Integralgrenzen für die Variablen q_1^2 und q_2^2 nur numerisch berechnet werden. Mit Hilfe der Beziehung (D.15) ergeben sich $q_1^2_{\max,\min}$ und $q_2^2_{\max,\min}$ aus der Gleichung

$$\frac{u_2^+ + ((u_2^+)^2 - \epsilon)^{1/2}}{u_2^- + ((u_2^-)^2 - \epsilon)^{1/2}} - 1 = 0 \quad (\text{VII.108})$$

Numerisch werden die Extremalwerte $q_i^2_{\max,\min}$ durch die Berechnung der beiden Schnittpunkte

$$u_2^+(q_i^2) = u_2^-(q_i^2)$$

bestimmt. An diesen Schnittpunkten hat die Funktion

$G(q_1^2, q_2^2, u_1, u_2, w^2)$ aus (VII.92) einen Berührungspunkt mit den q_i^2 -Achsen. Für $|q_i^2| < |q_i^2|_{\min}$ ist wieder $G > 0$, jedoch ist diese Kinematik unphysikalisch. So folgt zum Beispiel für $|q_1^2| = |q_2^2| = |q^2| < |q^2|_{\min}$ aus den Gleichungen (VII.63 - VII.67) $\cos\theta_2' > 1$, das heißt in diesem unphysikalischen Bereich sind diese Gleichungen inkonsistent.

Es werden weitere Abkürzungen eingeführt

$$b_1 = 4(p_1 \cdot p_2) + v \quad (\text{VII.109})$$

$$b_2 = 4M_1^2 - q_1^2 \quad (\text{VII.110})$$

$$b_3 = 4M_2^2 - q_2^2 \quad (\text{VII.111})$$

Aus den Gleichungen (VII.55), (VII.99) und (D.15) - (D.23) und mit $\alpha = \frac{e^2}{4}$ folgt abschließend ein analytischer

Ausdruck für den dreifach differentiellen Wirkungs-
querschnitt der Zwei - Photonen Erzeugung von massiven
Leptonen im Stoß zweier Klein - Gordon Teilchen.¹⁴¹⁾

$$\frac{d\sigma}{dq_1^2 dq_2^2 dW^2} = -Z_1^2 Z_2^2 \alpha^4 / 32 \beta / M_2 (2\pi)^{-2} q_1^{-4} q_2^{-4} \cdot$$

$$((p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2)^{-1/2} / P_1 (d_1 + d_3)(b_1^2 L_{00} + L_{20} + L_{02} +$$

$$2 L_{11} - 2 L_{10} b_1 - 2 L_{01} b_1) + d_2 b_2 b_3 L_{00} +$$

$$d_4 / D b_2 (L_{02} - 2 v L_{01} + v^2 L_{00}) +$$

$$d_5 / D b_3 (L_{20} - 2 v L_{10} + v^2 L_{00}) +$$

$$2 / D (d_6 + d_7) / v (b_1 (L_{11} + v^2 L_{00} - v L_{01} - v L_{10}) - L_{21}$$

$$- L_{12} - v^2 L_{10} - v^2 L_{01} + v L_{20} + v L_{02} + 2 v L_{11}) +$$

$$d_8 / D^2 (L_{22} - 2 v L_{12} + v^2 L_{02} - 2 v L_{21} + 4 v^2 L_{11}$$

$$- 2 v^3 L_{01} + v^2 L_{20} - 2 v^3 L_{10} + v^4 L_{00}) \quad (\text{VII.112})$$

VIII Zusammenfassung der Resultate

Es wurden Untersuchungen zur spontanen und induzierten Positronenproduktion in überkritischen Feldern und zum Abschütteln der Vakuumpolarisationswolke im Stoß sehr schwerer Kerne als qualitativ neue Aspekte der Physik starker Felder durchgeführt. Die erzielten numerischen Resultate können durch experimentelle Messungen verifiziert werden.

Für die kritische Kernladung, bei der das $1s$ - Elektron in das negative Kontinuum der Dirac - Gleichung eintaucht und spontane Positronenproduktion ermöglicht wird, fanden wir unter Berücksichtigung des ausgedehnten Atomkerns, der Elektron - Elektron Wechselwirkung, der quantenelektrodynamischen Korrekturen und phänomenologischer Wechselwirkungen $Z_{\text{krit}} = 173$. In diesem Zusammenhang wurden grundlegende Eigenschaften der superschweren Atome, zum Beispiel Elektronenenergien und -ladungsdichten sowie Übergangsraten, bestimmt und tabelliert. Im Uran - Uran Stoß beträgt der kritische Radius in der Einelektronennäherung $R_{\text{krit}} = 35 \text{ fm}$, unter Berücksichtigung aller Korrekturen verschiebt er sich zu $R_{\text{krit}} = 27 \text{ fm}$. Die relativistischen Elektronenwellenfunktion der gebundenen als auch der Kontinuumszustände sind numerisch berechnet worden.

Wirkungsquerschnitte, Stoßparameter- und Elektronenenergieverteilungen für Locherzeugung in inneren

Elektronenniveaus von superschweren Quasimolekülen werden angegeben. Grundlegend für den experimentellen Nachweis der spontanen und induzierten Positronenproduktion ist die K - Loch Ionisationswahrscheinlichkeit $|a(t,b)|^2$ im Uran - Uran Stoß mit Ionenenergien im Bereich der Coulombbarriere. Als Maximum fanden wir für den Stoßparameter $b = 0$ $|a(t)|_{\max}^2 = 0.05$, während sich asymptotisch bei $t = \infty$ $|a|^2 = P(0) = 0.02$ ergab. $P(b)$ zeigt als Funktion des Stoßparameters beziehungsweise der Ionenenergie ein expotentiellles Verhalten. Diese unerwartet hohen Locherzeugungsraten, die aus der starken Abhängigkeit der relativistischen Elektronenwellenfunktionen von der Kernladung und vom Zwei - Zentren Abstand für $(Z_1 + Z_2)\alpha = Z\alpha > 1$ resultiert, sichert die Möglichkeit einer Spektroskopie der superschweren Quasiatome und des Nachweises des Zerfalls des neutralen Vakuums für $Z > Z_{\text{krit}}$. Weiterhin haben wir gezeigt, daß direkte Paarerzeugung im Stoß schwerer Kerne verstanden werden kann als das Abschütteln der stark ausgeprägten Vakuumpolarisationswolke für $Z\alpha > 1$. Der kollektive Charakter dieses Prozesses bezüglich der Zahl der beteiligten Photonen zeigt sich in der starken Ladungsabhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnittes $\sigma^{e^+,e^-} \sim Z^{18}$. Für den Pb - Pb Stoß bei $E_{\text{CM}} = 605$ MeV fanden wir $\sigma^{e^+,e^-} = 76$ μb .

Das Spektrum der Positronen in bezug auf ihre Energie hat ein Maximum bei $E_{\text{kin}}^{e^+} \approx 400 \text{ KeV}$ mit $d\sigma/dE = 0.1 \text{ } \mu\text{b/keV}$. Ebenso wie das Elektronenspektrum fällt es für große Energien exponentiell ab. Aufgrund der Coulombwechselwirkung unterscheiden sich jedoch beide Spektren deutlich bei kleinen Energien. Da die Positronenrate aus der Konversion von Coulombangeregten Kernniveaus im Pb - Pb System minimal ist, sollte dieser Prozeß hier experimentell meßbar sein.

Bei der Berechnung der spontanen und induzierten Positronenproduktion wurde bisher stets eine konstante K - Locherzeugungswahrscheinlichkeit von $L_0 = 0.01$ angenommen. Erst die Berücksichtigung der zeitabhängigen Ionisationsamplitude $a(t)$ wird eine Aussage darüber erlauben, ob der Zerfall des neutralen Vakuums in U - U Stößen experimentell von der direkten Paarbildung zum Beispiel durch den Absolutwert oder durch die Form der Spektren getrennt werden kann.

Ein Hintergrundeffekt ist die Positronenerzeugung durch Konversion von nuklearen Bremsstrahlungsphotonen.

Nukleare Bremsstrahlung kann bezüglich der quasimolekularen Röntgenspektroskopie nicht vernachlässigt werden, jedoch ist die daraus resultierende Paarbildung aufgrund des kleinen Konversionskoeffizienten in U - U Stößen nicht meßbar. Wir fanden

$$\sigma_{\text{Brems}}^{e^+, e^-} = 5.8 \cdot 10^{-8} \text{ barn bei } E_{\text{Lab}} = 1400 \text{ MeV.}$$

Ein bedeutender Hintergrundeffekt hingegen ist die innere Paarbildung erzeugt durch nukleare Coulombanregung in schweren Kernen. Es ergab sich $\sigma_{Cb}^{e^+,e^-} = 228 \text{ } \mu\text{b}$, dies ist nur um einen Faktor 2 geringer als die induzierte Positronenproduktion. Da die nukleare Coulombanregung aufgrund der Kernniveaustruktur von ${}_{92}^{238}\text{U}$ nicht zu hochenergetischen Positronen ($E_p > 1 \text{ MeV}$) führen kann, lassen sich die beiden Prozesse jedoch experimentell trennen. Ein Konkurrenzeffekt zur Ionisation im Schwerionenstoß ist die Konversion von gebundenen Elektronen in das obere Kontinuum. Als Maximum der K - Locherzeugungswahrscheinlichkeit durch Konversion im Uran - Uran Stoß bei $E_{CM} = 800 \text{ MeV}$ fanden wir $P(\theta_{ion} \sim 40^\circ) = 0.07$. Als Folge kann die quasimolekulare Röntgenstrahlung nicht mehr auf die Zahl der gemessenen Elektronenübergänge in den separierten Atomen normiert werden. Bei Streuungen an der Coulombbarriere überdeckt das Photonenspektrum resultierend aus der nuklearen Coulombanregung im Uran - Uran Stoß das quasimolekulare Spektrum. Dagegen ist die Möglichkeit der Spektroskopie von superschweren Quasimolekülen im Blei - Blei System gegeben. Für den relativistischen Stoß von Kernen wurden im Rahmen des Zwei - Photonen Prozesses mit der Methode der äquivalenten Photonen Paarerzeugungsquerschnitte berechnet. Für den Stoß eines relativistischen

Protons ($E/M = \gamma = 200$) in einer Kernemulsion mit einer effektiven Ordnungszahl von $Z = 21.4$ ergab sich $\sigma^{e^+, e^-} = 25 \text{ mb}$, was in sehr guter Übereinstimmung mit den besten theoretischen Resultaten für diesen Prozeß, abgeleitet aus Feynman - Diagrammen höherer Ordnung ist. Als Resultat für den relativistischen U - U Stoß mit $\gamma = 2$ erhielten wir $\sigma = 0.6 \text{ barn}$. Es konnte gezeigt werden, daß die relativistischen Näherungsverfahren nicht auf den nichtrelativistischen Stoß angewendet werden dürfen.

Abschließend wurde bezüglich der Zwei - Photonen Paarbildung der exakte Feynman - Graph vierter Ordnung behandelt. Für diesen Prozeß haben wir einen analytischen differentiellen Wirkungsquerschnitt in bezug auf die Quadrate der Photonenmassen q_1^2 und q_2^2 sowie auf das Quadrat der invarianten Leptonenmasse $W^2 = (p_+ + p_-)^2$ abgeleitet, der nun numerisch ausgewertet werden kann.

IX Anhang

A Parametrisierung der Rutherford - Hyperbel

In der Streuebene lassen sich die Koordinaten x und y durch den Parameter w ausdrücken.

$$x = a (\epsilon + \cosh w) \quad (\text{A.1})$$

$$y = a (\epsilon^2 - 1)^{1/2} \sinh w \quad (\text{A.2})$$

Der Zwei - Zentrenabstand R ist gegeben durch

$$R = a (\epsilon \cosh w + 1) \quad (\text{A.3})$$

Die Zeitskala wird so gewählt, daß am Ort nächster Annäherung $R_{\min}$ mit

$$R_{\min} = \frac{z_1 z_2 e^2}{2 E_{\text{CM}}} + \left[\left(\frac{z_1 z_2 e^2}{2 E_{\text{CM}}} \right)^2 + \frac{L^2}{2 \mu E_{\text{CM}}} \right]^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

$t = 0$ gilt, hieraus folgt

$$t = \left[\frac{\mu a^3}{z_1 z_2 e^2} \right]^{1/2} (\epsilon \sinh w + w) \quad (\text{A.5})$$

ϵ ist die Exzentrizität der Hyperbel - Bahn

$$\epsilon = (1 + (b/a)^2)^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

Zwischen dem Stoßparameter b und dem Schwerionenstreuungswinkel θ_{CM} im Schwerpunktsystem besteht die Beziehung

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2 E_{CM}} \cot(\theta_{CM}/2) = a \cot(\theta_{CM}/2) \quad (A.7)$$

Die Größe a gibt den halben Zwei - Zentrenabstand bei nächster Annäherung in Frontalstößen ($b = 0$) an.

Der Drehimpuls L in (A.4) ergibt sich aus dem Stoßparameter b , der reduzierten Masse μ

$$\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2) \quad (A.8)$$

und der kinetischen Ionenenergie E_{CM} im Schwerpunktsystem

$$L = b (2 \mu E_{CM})^{1/2} = \mu b v_{\infty} \quad (A.9)$$

Für die abstoßende Coulombwechselwirkung

$$V(R) = Z_1 Z_2 e^2 / R \quad (A.10)$$

folgt für den Betrag der Schwerionengeschwindigkeit

$$v = \dot{R}$$

$$\dot{R} = \left(2/\mu (E_{CM} - Z_1 Z_2 e^2 / R) - \frac{L^2}{\mu^2 R^2} \right)^{1/2} \quad (A.11)$$

und für die Beschleunigung

$$\ddot{R} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu R^2} \quad (A.12)$$

B Der Comptontensor $B^{\mu\rho\nu\sigma}$

$$\begin{aligned}
 B^{\mu\rho\nu\sigma} = & 2\pi \beta (d_1 g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + d_2 g^{\rho\sigma} g^{\mu\nu} + d_3 g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} + \\
 & d_4/D g^{\mu\nu} q_1^\rho q_1^\sigma + d_5/D g^{\rho\sigma} q_2^\mu q_2^\nu + \\
 & \frac{d_6}{vD} (g^{\rho\mu} q_1^\sigma q_2^\nu + g^{\sigma\nu} q_1^\rho q_2^\mu) + \frac{d_7}{vD} (g^{\rho\nu} q_1^\sigma q_2^\mu + g^{\sigma\mu} q_1^\rho q_2^\nu) \\
 & + d_8/D^2 q_1^\rho q_1^\sigma q_2^\mu q_2^\nu) \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $d_1 - d_8$ wurden berechnet zu

$$\begin{aligned}
 8d_1 = & 16 + g_1 + 8g_2 - 4W^2(6v - m^2)/D + \\
 & (g_3 + 16v^2(1 - vW^2/D) + q_1^2 q_2^2 g_1/2) L/v \quad (B.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8d_2 = & g_1 + 8g_2 + 4W^2(W^2 - 2v + m^2)/D + (-g_3 - 16m^4 + \\
 & 4v^2W^2(W^2 + 2m^2)/D + q_1^2 q_2^2 g_1/2) L/v \quad (B.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8d_3 = & g_1 - 8g_2 + 4W^2(2v + m^2)/D + \\
 & (g_3 + q_1^2 q_2^2 g_1/2) L/v \quad (B.4)
 \end{aligned}$$

$$d_4 = q_2^2 d_2 + q_2^2/(2D) (2 W^2 q_2^2 + 3 q_1^1 W^4 q_2^2/D + 2 q_1^2 W^2 g_2 + (g_4 + q_1^2 D g_1/2) q_2^2 L/v) \quad (B.5)$$

$$d_5 = q_1^2 d_2 + q_1^2/(2D) (2 W^2 q_1^2 + 3 q_2^2 W^4 q_1^2/D + 2 q_2^2 W^2 g_2 + (g_5 + q_2^2 D g_1/2) q_1^2 L/v) \quad (B.6)$$

$$d_6 = -v^2 d_1 + q_1^2 q_2^2 v/(2D) (4 W^2 - 3 v W^4/D + 2 g_2 W^2 + (-D v g_1/2 + W^2(q_1^2 q_2^2 + 2 v^2 - 2 m^2 v)) L/v) \quad (B.7)$$

$$d_7 = v^2 (d_1 - d_3) + d_6 + q_1^2 q_2^2 v/D (-2 W^2 g_2 - q_1^2 q_2^2 W^2 L/v) \quad (B.8)$$

$$d_8 = -v^2 (d_1 + d_3) - 3 q_1^2 q_2^2 d_2 + 3 d_4 q_1^2 + d_5 q_2^2 - 2(d_6 + d_7) - q_1^2 q_2^2/D (2 W^2 q_2^2 + 2 g_2 W^2 (q_1^2 + 2 m^2) + g_4 q_2^2 L/v) \quad (B.9)$$

mit

$$g_1 = (q_1^2 q_2^2 + 2 v^2) W^4/D^2 \quad (B.10)$$

$$g_2 = \left[1 + \frac{4 m^2 D}{q_1^2 q_2^2 W^2} \right]^{-1} \quad (B.11)$$

$$g_3 = 4(q_1^2 q_2^2 + W^2(v + m^2) - 2(v + m^2)^2) + \\ W^2/D (4 v^2(v + m^2) + q_1^2 q_2^2 W^2) \quad (B.12)$$

$$g_4 = q_1^2 W^2 (q_1^2 + q_2^2) + 2 m^2 (2 q_1^2 v + 2 v^2 - q_1^2 q_2^2 + q_1^4) \quad (B.13)$$

$$g_5 = q_2^2 W^2 (q_1^2 + q_2^2) + 2 m^2 (2 q_2^2 v + 2 v^2 - q_1^2 q_2^2 + q_2^4) \quad (B.14)$$

und

$$L = \frac{1}{\beta D^{1/2}} \ln \frac{v - \beta D^{1/2}}{v + \beta D^{1/2}} \quad (B.15)$$

C Paarerzeugungswirkungsquerschnitte durch virtuelle Photonen in der Helizitätsbasis.

$$\begin{aligned} \sigma_{TT} = & \pi r_0^2 m_e^2 / (W^2 X) \left((2 + 2 m^2/X - (2 m^2/v)^2 + (q_1^2 + q_2^2)/X \right. \\ & + \frac{q_1^2 q_2^2 W^2}{2 X v^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{q_1^2 q_2^2}{X v} \right)^2 \left. \right) vL - \Delta t \left(1 + m^2/X + \right. \\ & \left. (q_1^2 + q_2^2)/X + q_1^2 q_2^2/T + \frac{3}{4} q_1^2 q_2^2/X^2 \right) \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{TS} = & - \pi r_0^2 m_e^2 q_2^2 / (W^2 X^2) \left(\Delta t (1 + q_1^2/T (6 m^2 + q_1^2 + \right. \\ & \left. \frac{3}{2} q_1^2 q_2^2/X)) - L/v (4 m^2 X + q_1^2 (W^2 + 2m^2) + \right. \\ & \left. q_1^2 (q_1^2 + q_2^2 + \frac{3}{2} q_1^2 q_2^2/X)) \right) \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{SS} = & \pi r_0^2 m_e^2 q_1^2 q_2^2 / (W^2 X^3) \left(L/v (2 W^2 X + 3 q_1^2 q_2^2) \right. \\ & \left. - \Delta t (2 + q_1^2 q_2^2/T) \right) \end{aligned} \quad (C.3)$$

mit

$$W^2 X = v^2 - q_1^2 q_2^2 \quad (C.4) \quad T = 4 X m^2 + q_1^2 q_2^2 \quad (C.5)$$

$$\Delta t = (4X(W^2 - 4m^2))^{1/2} \quad (C.6)$$

$$L = \ln \frac{(v + \Delta t/2)^2}{4Xm^2 + q_1^2 q_2^2} \quad (C.7)$$

D Berechnung der Integrale L_{ab}

Das Doppelintegral L_{ab} wurde in Gleichung (VII.105) definiert. Die im Anhang D verwendeten Abkürzungen haben dieselbe Bedeutung wie in Kapitel VII.

Es folgt zunächst

$$M_{a0} = \int_{u_1^-}^{u_1^+} u_1^a (A u_1^2 + B u_1 + C)^{-1/2} du_1 \quad (D.1)$$

Als Resultat erhält man

$$M_{00} = - \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin \frac{2Au_1 + B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \Big|_{u_1^-}^{u_1^+} = \frac{\pi}{\sqrt{-A}} \quad (D.2)$$

$$M_{10} = - \frac{\pi}{2} \frac{B}{A\sqrt{-A}} \quad (D.3)$$

$$M_{20} = \frac{\pi}{8} \frac{3B^2 - 4AC}{A^2 \sqrt{-A}} \quad (D.4)$$

Damit ist die aufgrund des Phasenraumvolumens (VII.99) geforderte erste Integration analytisch ausgeführt worden. Nach Ref. 136 lassen sich physikalische Bereiche in niedrigeren Dimensionen durch die Integration von (VII.99) erhalten, indem wiederum die Nullstellen gesucht werden. Die Integralgrenzen für u_2 ergeben sich aus Gleichung (D.2) durch

$$B^2 - 4AC = 4 \phi u_2^4 + 4 \omega u_2^3 + (\delta^2 + 4 \sigma - 4 \epsilon \phi) u_2^2 +$$

$$(2 \delta \xi - 4 \epsilon \omega) u_2 - 4 \epsilon \sigma + \xi^2 = 0 \quad (D.5)$$

Diese Gleichung vierter Ordnung kann analytisch gelöst werden. Von den vier mathematischen Lösungen $u_2^{1,2,3,4}$ erfüllen jedoch nur zwei die physikalische Forderung, daß Photonenfrequenzen positiv definit sind. Eine einfache Bedingung für die eindeutige Bestimmung der Integralgrenzen u_2^+ und u_2^- können wir im Schwerpunktsystem finden, das definiert wird durch

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p} \quad (D.6)$$

und

$$p_1 = (E_1, \vec{p}), \quad p_2 = (E_2, -\vec{p}) \quad (D.7)$$

$$p'_1 = (E'_1, \vec{p}'_1), \quad p'_2 = (E'_2, -\vec{p}'_2) \quad (D.8)$$

Hieraus folgt

$$q_1^2 = (p_1 - p'_1)^2 = 2M_1^2 - 2E_1E'_1 + 2\vec{p}\vec{p}'_1 \quad (D.9)$$

$$q_2^2 = (p_2 - p'_2)^2 = 2M_2^2 - 2E_2E'_2 + 2\vec{p}\vec{p}'_2 \quad (D.10)$$

sowie

$$u_1 = 2p_1q_2 = 2(E_1E_2 - E_1E'_2 + \vec{p}^2 - \vec{p}\vec{p}'_2) \quad (D.11)$$

$$u_2 = 2p_2q_1 = 2(E_2E_1 - E_2E'_1 + \vec{p}^2 - \vec{p}\vec{p}'_1) \quad (D.12)$$

Kombiniert man nun die Gleichungen (D.7) und (D.9),
so führt dies zu

$$E_2 - E'_2 = \frac{u_1 + q_2^2}{2(E_1 + E_2)} \quad (D.13)$$

und analog

$$E_1 - E'_1 = \frac{u_2 + q_1^2}{2(E_1 + E_2)} \quad (D.14)$$

Der Forderung positiver Photonenfrequenzen

$(E_1 - E'_1 \geq 0)$ entspricht demnach $u_1 \geq |q_2^2|$ und
 $u_2 \geq |q_1^2|$. Damit ist das Maximum u_2^+ und Minimum u_2^-
eindeutig festgelegt.

Es wird nun die Integration über u_2 durchgeführt.

$$L_{ab} = \int_{u_2^-}^{u_2^+} M_{a0} u_2^b du_2$$

$$L_{00} = \pi \ln(u_2 + (u_2^2 - \epsilon)^{1/2}) \bigg|_{u_2^-}^{u_2^+} \quad (D.15)$$

$$L_{10} = \pi/2 (-\xi u_2/\epsilon - \delta)(u_2^2 - \epsilon)^{-1/2} \bigg|_{u_2^-}^{u_2^+} \quad (D.16)$$

$$L_{01} = \pi(u_2^2 - \epsilon)^{1/2} \bigg|_{u_2^-}^{u_2^+} \quad (D.17)$$

$$\begin{aligned}
 L_{20} = & -\pi/8 ((u_2^2 - \epsilon)^{-1/2} 4\omega + (u_2^2 - \epsilon)^{-3/2} 2\delta\xi + \\
 & 4u_2(u_2^2 - \epsilon)^{-1/2}(\phi + \sigma/\epsilon + 3\xi^2/\epsilon^2) + \\
 & u_2^3 (u_2^2 - \epsilon)^{-3/2} (\delta^2/\epsilon + \xi^2/\epsilon^2) - \\
 & 4\phi \ln((u_2^2 - \epsilon)^{1/2} + u_2)) \Big|_{u_2^-}^{u_2^+} \quad (D.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{11} = & \pi/2 (\delta(-u_2(u_2^2 - \epsilon)^{-1/2} + \ln((u_2^2 - \epsilon)^{1/2} + u_2)) \\
 & - \xi(u_2^2 - \epsilon)^{-1/2} \Big|_{u_2^-}^{u_2^+} \quad (D.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{21} = & -\pi/8 (-4\phi(u_2^2 - \epsilon)^{1/2} + (u_2^2 - \epsilon)^{-1/2}(4\epsilon\phi + 3\delta^2 + 4\sigma) \\
 & + (u_2^2 - \epsilon)^{-3/2}(\delta^2\epsilon + \xi^2) + 4\omega u_2(u_2^2 - \epsilon)^{-1/2} \\
 & + 2\delta\xi/\epsilon u_2^3 (u_2^2 - \epsilon)^{-3/2} - \\
 & 4\omega \ln((u_2^2 - \epsilon)^{1/2} + u_2)) \Big|_{u_2^-}^{u_2^+} \quad (D.20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{02} = & \pi(u_2/2 (u_2^2 - \epsilon)^{1/2} + \epsilon/2 \ln((u_2^2 - \epsilon)^{1/2} + u_2)) \Big|_{u_2^-}^{u_2^+} \\
 & \quad (D.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{12} = & \pi/2(\delta(u_2^2 - \epsilon)^{1/2} - \epsilon\delta(u_2^2 - \epsilon)^{-1/2} - u_2\xi(u_2^2 - \epsilon)^{-1/2} \\
 & + \xi\ln((u_2^2 - \epsilon)^{1/2} + u_2)) \Big|_{u_2^-}^{u_2^+} \quad (D.22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{22} = & -\pi/8 ((u_2^2 - \epsilon)^{-1/2}(4\epsilon\omega + 6\delta\xi) + 2\delta\epsilon\xi(u_2^2 - \epsilon)^{-3/2} \\
 & - 10 \epsilon^2\phi u_2(u_2^2 - \epsilon)^{-3/2} - 2 \phi u_2^5 (u_2^2 - \epsilon)^{-3/2} \\
 & + (12 \epsilon\phi + \delta^2 + \xi^2/\epsilon) u_2^3 (u_2^2 - \epsilon)^{-3/2} \\
 & - 4\omega (u_2^2 - \epsilon)^{1/2} - u_2(4\epsilon\phi - 3\delta^2 + 4\sigma)(u_2^2 - \epsilon)^{-1/2} \\
 & - (4\sigma + 6\epsilon\phi + 3\delta^2) \ln((u_2^2 - \epsilon)^{1/2} + u_2)) \Bigg|_{u_2^-}^{u_2^+}
 \end{aligned}$$

(D.23)

X Literaturverzeichnis

- 1) J. Reinhardt, W. Greiner, Quantum electrodynamics of strong fields, Vordruck 1976, erscheint in Reports on Progress in Physics
- 2) B. Müller, Positron creation in superheavy quasi - molecules, Ann. Rev. Nucl. Science 26 (1976) 351
- 3) R. K. Smith, B. Müller, W. Greiner, Proceedings of the 4th Int. Conf. on Atomic Physics, Heidelberg 1974, S. 209
- 4) M. S. Freedman, F. T. Porter, J. B. Mann, Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 711
- 5) A. S. Dawydow, Quantenmechanik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967
- 6) G. Soff, W. Greiner, Phys. Blätt. 30 (1974) 345
- 7) I. Pomeranchuk, J. Smorodinsky, J. Phys. U.S.S.R 9 (1945) 97
- 8) F. G. Werner, J. A. Wheeler, Phys. Rev. 109 (1958) 126
- 9) W. Pieper, W. Greiner, Z. Physik 218 (1969) 327
- 10) D. Rein, Z. Physik 221 (1969) 423
- 11) V. V. Voronkov, N. N. Kolesnikov, Sov. Phys. JETP 12 (1961) 136
- 12) A. Achieser, W. Berestezki, Quantenelektrodynamik, Frankfurt am Main 1962
- 13) E. M. Rose, Relativistische Elektronentheorie, B - I Hochschultaschenbücher, Mannheim 1971

- 14) G. Soff, Ein Test nichtlinearer elektromagnetischer Feldtheorien in myonischen Atomen, Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main 1972
- 15) G. Soff, B. Müller, J. Rafelski, Z. Naturforsch. 29a (1974) 1267
- 16) W. Schäfer, G. Soff, Nuovo Cim. 31B (1976) 250
- 17) G. Soff, J. Rafelski, W. Greiner, Phys. Rev. 7A (1973) 903
- 18) G. Soff, B. Müller, J. Rafelski, W. Greiner, Z. Naturforsch. 28a (1973) 1389
- 19) B. Müller, J. Rafelski, G. Soff, W. Greiner, Proc. of Heavy Ion, Summer Study, Oak Ridge (1972) 452
- 20) J. Blomquist, Nucl. Phys. B48 (1972) 95
- 21) W. Schäfer, V. Oberacker, G. Soff, Nucl. Phys. A272 (1976) 493
- 22) M. Gyulassy, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 921
- 23) G. A. Rinker, L. Wilets, Phys. Rev. A126 (1975) 748
- 24) G. W. Erickson, Phys. Rev. Lett. 27 (1971) 780
- 25) K. T. Cheng, W. R. Johnson, Self-Energy Corrections to the K - Elektron Binding in Heavy and Superheavy Atoms, Phys. Rev. A14 (1976) 1943
- 26) P. G. Reinhard, Nuovo Cim. Lett. 13 (1970) 313
- 27) P. G. Reinhard, W. Greiner, A. Arenhövel, Nucl. Phys. A166 (1971) 173
- 28) J. Rafelski, B. Müller, G. Soff, W. Greiner, Ann. Phys. 88 (1974) 419

- 29) B. Fricke, W. Greiner, J. T. Waber, Theoret. Chim. Acta 21 (1971) 235
- 30) D. A. Liberman, D. T. Cromer, J. T. Waber, Comp. Phys. Comm. 2 (1971) 107
- 31) G. Soff, B. Müller, Nuovo Cim. Lett. 9 (1974) 557
- 32) B. Fricke, G. Soff, Dirac - Fock - Slater calculations of the elements Fermium ($Z=100$) to $Z=173$, GSI - Bericht T1, 1974
- 33) B. Fricke, G. Soff, Atomic Data and Nuclear Data Tables, im Druck
- 34) J. Rafelski, B. Müller, W. Greiner, Nuovo Cim. Lett. 4 (1972) 469
- 35) J. Rafelski, Phys. Rev. C13 (1976) 2086
- 36) B. Müller, J. Rafelski, W. Greiner, Phys. Lett. 47B (1973) 5
- 37) B. Müller, W. Greiner, Z. Naturforsch. 31a (1976) 1
- 38) B. Müller, private Mitteilung
- 39) P. T. Ong, Dissertation, Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main 1976
- 40) R. V. Gentry, T. A. Cahill, N. R. Fletcher, H. C. Kaufmann, L. R. Medsker, J. W. Nelson, R. G. Flocchini, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 11
- 41) G. Soff, H.-J. Lustig, B. Müller, erscheint in J. Phys. G
- 42) G. Soff, H. - J. Lustig, B. Müller, W. Greiner, On the Identification of Superheavy Elements from L - and M - Spectra, Proceedings of the XIth International School on Nuclear Physics, Predeal, Romania 1976

- 43) P. H. Mokler, H. J. Stein, P. Armbruster,
Phys. Rev. Lett. 29 (1972) 827
- 44) W. Wölflli, Ch. Stoller, G. Bonani, M. Suter, M. Stöckli,
Nuovo Cim. Lett. 14 (1975) 577
- 45) J. H. Scofield, Phys. Rev. 179 (1969) 9
- 46) U. Mosel, W. Greiner, Z. Physik 222 (1969) 261
- 47) J. Grumann, U. Mosel, B. Fink, W. Greiner,
Z. Phys. 228 (1969) 371
- 48) J. M. Eisenberg, W. Greiner, Excitation Mechanism of
the Nucleus, North - Holland, Amsterdam 1970
- 49) H. R. Rosner, C. P. Bhalla, Z. Physik 231 (1970) 347
- 50) R. Anholt, J. O. Rasmussen, Phys. Rev. A9 (1974) 585
- 51) B. Müller, R. K. Smith, W. Greiner, Phys. Lett. 53B
(1975) 401
- 52) G. Soff, B. Müller, Z. Physik A280 (1977) 243
- 53) Ralston/Wilf, Mathematical Methods for Digital
Computers, John Wiley, 1960
- 54) B. Müller, J. Rafelski, W. Greiner, Nuovo Cim. 18A
(1973) 551
- 55) B. Müller, J. Rafelski, W. Greiner, Z. Physik 257 (1972) 62
- 56) B. Müller, J. Rafelski, W. Greiner, Z. Physik 257 (1972) 183
- 57) W. E. Meyerhof, Phys. Rev. A10 (1974) 1005
- 58) C. Foster, T. P. Hoogkamer, P. Woerlee, F. W. Saris,
J. Phys. B9 (1976) 1943
- 59) D. Burch, W. P. Ingalls, H. Wiemann, R. Vandenbosch,
Phys. Rev. A10 (1974) 1245

- 60) G. Heiligenthal, Dissertation, Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main
- 61) D. R. Bates, R. Mc. Carroll, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A245 (1958) 175
- 62) D. R. Bates, D. A. Williams, Proc. Roy. Soc. London 83 (1964) 425
- 63) W. Betz, G. Soff, B. Müller, W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 1046
- 64) W. Betz, G. Heiligenthal, B. Müller, V. Oberacker, J. Reinhardt, W. Schäfer, G. Soff, W. Greiner, Proceedings of the XIth International School on Nuclear Physics, Predeal, Romania 1976
- 65) G. Soff, J. Reinhardt, B. Müller, W. Greiner, Shake - off of the Vacuum Polarization in Quasimolecular Collisions of Very Heavy Ions, Vordruck 1976
- 66) E. I. Malkov, I. M. Shmushkevich, Sov. Phys. JETP 12 (1961) 1282
- 67) J. Reinhardt, Bremsstrahlung und Paarerzeugung in Kern - Kern - Stößen, Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt 1975
- 68) J. Reinhardt, G. Soff, W. Greiner, Z. Physik A276 (1976) 285
- 69) H. P. Trautvetter, J. S. Greenberg, P. Vincent, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 202
- 70) M. E. Rose, in K. Siegbahn, Alpha-, Beta- and Gamma-ray Spectroscopy (North - Holland, Amsterdam 1965) S. 887

- 71) M. E. Rose, Phys. Rev. 76 (1949) 678
- 72) W. Berestezki, I. M. Shmushkevich,
J. Exp. Theor. Phys. 19 (1949) 592
- 73) V. Oberacker, G. Soff, W. Greiner, Nucl. Phys. A259
(1976) 324
- 74) J. C. Jaeger, H. R. Hulme, Proc. Roy. Soc. 148 (1935) 708
- 75) B. N. Belyaev, Sov. Journ. Nucl. Phys. 14 (1972) 641
- 76) R. J. Lombard, C. F. Perdrisat, J. H. Brunner,
Nucl. Phys. A110 (1968) 41
- 77) R. J. Lombard, Helv. Phys. Acta 37 (1964) 3
- 78) R. Wilson, in K. Siegbahn, Alpha-, Beta- and
Gamma-ray Spectroscopy (North - Holland,
Amsterdam 1965) S. 1557
- 79) S. Schumann, M. Waldschmidt, Z. Physik 271 (1974) 97
- 80) M. E. Rose, Internal Conversion Coefficients,
North - Holland, Amsterdam 1958
- 81) L. B. Okun, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 89 (1953) 833
- 82) S. S. Gershtein, V. S. Popov, Nuovo Cim. Lett.
6 (1973) 593
- 83) V. S. Popov, Sov. Phys. JETP 38 (1974) 18
- 84) V. Oberacker, G. Soff, W. Greiner, Phys. Rev. Lett.
36 (1976) 1024
- 85) J. M. Eisenberg, W. Greiner, Nuclear Models,
North - Holland, Amsterdam 1970
- 86) E. Grosse, J. de Boer, R. M. Diamond, F. S. Stephens,
P. Tjøm, Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 565

- 87) V. Oberacker, H. Holm, W. Scheid, Phys. Rev. C10
(1974) 1917
- 88) V. Oberacker, Überlagerung von Coulomb - und
Kernkräften in der Schwerionenstreuung, Diplomarbeit,
Institut für Theoretische Physik der Universität
Frankfurt am Main 1973
- 89) K. Alder, A. Winther, Coulomb excitation,
Academic Press, New York 1966
- 90) H. Peitz, Dissertation, Institut für Theoretische
Physik der Universität Frankfurt am Main
- 91) K. Albrecht, Nucl. Phys. A207 (1973) 225
- 92) R. Thomas, Phys. Rev. 58 (1940) 714
- 93) R. S. Hager, E. C. Seltzer, Nucl. Data A4 (1968) 1
- 94) V. Oberacker, G. Soff, W. Greiner, Proceedings
of the International School - Seminar on
Reactions of Heavy - Ions with Nuclei and Synthesis
of new Elements, Dubna 1975, S. 235
- 95) E. Fermi, Z. Physik 29 (1924) 315
- 96) C. F. von Weizsäcker, Z. Physik 88 (1934) 612
- 97) E. J. Williams, Proc. R. Soc. A139 (1933) 163
- 98) E. J. Williams, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys.
Medd. 13 No. 4 (1935)
- 99) P. Kessler, Acta Phys. Austriaca 41 (1975) 141
- 100) R. Jäckle, H. Pilkuhn, Nucl. Phys. A247 (1975) 521
- 101) C. Carimalo, G. Cochard, P. Kessler, J. Parisi,
B. Roehner, Phys. Rev. D10 (1974) 1561

- 102) J. D. Jackson, Classical Electrodynamics,
John Wiley, New York 1967
- 103) W. Heitler, The Quantum Theory of Radiation,
3rd edition, Oxford 1954
- 104) R. H. Dalitz, D. R. Yennie, Phys. Rev. 105
(1957) 1598
in Formel (1.1) fehlt ein Faktor (-1).
- 105) F. Oberhettinger, Tabellen zur Fourier
Transformation, Springer - Verlag 1954
- 106) A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger.
F. G. Tricomi, Tables of Integral Transforms Vol. I,
Mc. Graw - Hill, New York 1954
- 107) M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical
Functions, Dover Publications, New York 1965
- 108) H. Bethe, W. Heitler, Proc. Roy. Soc. 146 (1934) 83
- 109) L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der
Theoretischen Physik IVa, Relativistische
Quantentheorie, Akademie - Verlag, Berlin 1975
- 110) R. Anholt, S. Nagamiya, J. O. Rasmussen, H. Bowman,
J.G. Ioannou-Yannou, E. Rauscher, P. R. A14 (1976) 2103
- 111) A. M. Poskanzer, R. G. Sextro, A. M. Zebelman,
H. H. Gutbrod, A. Sandoval, R. Stock,
Phys. Rev. Lett. 35 (1975) 1701
- 112) L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Phys. Z.
Sowjetunion 6 (1934) 244
- 113) J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. 47 (1935) 146

- 114) E. C. G. Stueckelberg, *Helvetica Physica* 8
(1935) 324
- 115) L. Nordheim, *Journal de Physique et Radium* 6
(1935) 135
- 116) H. J. Bhabha, *Proc. Roy. Soc.* 152 (1935) 559
- 117) H. J. Bhabha, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 31
(1935) 394
- 118) Y. Nishina, S. Tomonaga, M. Kobayasi,
Sc. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. 27 (1935) 137
- 119) G. Racah, *Nuovo Cim.* 14 (1937) 93
- 120) T. Murota, A. Ueda, H. Tanaka, *Prog. Theor. Phys.*
16 (1956) 482
- 121) V. N. Baier, V. S. Fadin, *Sov. Phys. JETP* 34 (1972) 253
- 122) J. E. Butt, D. T. King, *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 904
- 123) P. L. Jain, M. Kazuno, B. Girard, Z. Ahmad,
Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 797
- 124) P. L. Jain, M. Kazuno, B. Girard, *Phys. Rev. Lett.*
32 (1974) 1460
- 125) Y. S. Tsai, *Rev. Mod. Phys.* 46 (1974) 815
- 126) V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, G. V. Meledin,
V. G. Serbo, *Phys. Rep.* 15C (1975) 181
- 127) J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistische
Quantenmechanik, B - I Hochschultaschenbücher,*
Mannheim 1966
- 128) M. L. Perl, *High Energy Hadron Physics*, John Wiley,
New York 1974

- 129) V. N. Baier, V. S. Fadin, V. A. Khoze,
Sov. Phys. JETP 23 (1966) 104
- 130) V. G. Zima, Sov. Journ. Nucl. Phys. 16 (1973) 580
- 131) V. F. Boldyshev, Y. P. Peresun'ko,
Sov. Journ. Nucl. Phys. 14 (1972) 576
- 132) V. N. Baier, private Mitteilung
- 133) N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, Introduction
to the Theory of Quantized Fields, Interscience
Publishers, New York 1959
- 134) V. M. Budnev, I. F. Ginzburg, G. V. Meledin,
V. G. Serbo, Nucl. Phys. B63 (1973) 519
- 135) G. Bonneau, M. Gourdin, F. Martin, Nucl. Phys. B54
(1973) 573
- 136) E. Byckling, K. Kajantie, Particle Kinematics,
John Wiley, London 1973
- 137) W. Gröbner, N. Hofreiter, Integraltafel - Erster Teil,
Dritte Auflage, Springer - Verlag, Wien 1961
- 138) I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of Integrals,
Series and Products, Academic press, New York 1965
- 139) W. Betz, Diplomarbeit, Institut für Theoretische
Physik der Universität Frankfurt am Main, 1976
- 140) V. Oberacker, Dissertation, Institut für Theoretische
Physik der Universität Frankfurt am Main
- 141) G. Soff, J. Reinhardt, W. Greiner, wird veröffentlicht

XI Figurenbeschreibung

Figur 1: Das Lösungsspektrum der Dirac - Gleichung für sphärisch symmetrische Potentiale. Für Punktkerne gibt es für Zustände mit einem Elektronengesamtdrehimpuls $j = 1/2$ für $Z > 137$ keine Lösungen mehr (gestrichelte Kurve). Die durchgezogenen Kurven zeigen den Energieeigenwert einiger niedrig liegenden Elektronenniveaus als Funktion der Ordnungszahl Z . Das Potential eines ausgedehnten Kernes und das Thomas - Fermi Potential zur Beschreibung der Elektron - Elektron Wechselwirkung wurde in die Dirac - Gleichung eingesetzt. Für das $1s$ - Niveau beträgt die kritische Ladung, bei der die Bindungsenergie $E_B = -2m_e$ erreicht, $Z = 172$; für das $2p_{1/2}$ - Niveau ist $Z = 185$ der entsprechende Wert. Bei größerer Zentralladung tauchen die gebundenen Elektronenzustände in den vollständig mit Elektronen besetzten Dirac - See ein. Als Konsequenz erhalten die eingetauchten Elektronen eine energieabhängige Niveaubreite, die qualitativ eingezeichnet wurde. Das positive Energiekontinuum beschreibt Elektronen, die nicht durch den Kern gebunden werden.

Figur 2: Die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi r|^2$ in fm^{-1} für die $1s_{1/2}$, $2p_{1/2}$ und $2s_{1/2}$ - Elektronen für $Z = 171$ als Funktion von r in fm . Für die radialen

Erwartungswerte $\langle r \rangle$ fanden wir $\langle r \rangle_{1s} = 118 \text{ fm}$,
 $\langle r \rangle_{2p_{1/2}} = 137 \text{ fm}$ und $\langle r \rangle_{2s} = 568 \text{ fm}$.

Figur 3: Dasselbe wie in Figur 2 für $_{82}\text{Pb}$.

Figur 4: Die radiale Dichteverteilung $|\psi r|^2 = u_1^2 + u_2^2$
in fm^{-1} für die Summe aller Elektronen in einem
neutralen System mit einer Zentralladung von $Z = 172$
als Funktion von r in fm . Die Kernladungsdichteverteilung
mit $A = 504$ hat die Parameter $c = 9.487 \text{ fm}$ und $t = 2.2 \text{ fm}$.
Die Elektron - Elektron Wechselwirkung wurde innerhalb
des Thomas - Fermi Modells berücksichtigt. Als Folge
relativistischer Effekte liegt das Hauptmaximum der
radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen
bei $r \approx 20 \text{ fm}$.

Figur 5: Dasselbe wie in Figur 4 für das neutrale
Atom $_{82}\text{Pb}$. Deutlich zu erkennen ist die Schalenstruktur
des Atoms.

Figur 6: Dasselbe wie in Figur 4 für das neutrale
Atom $_{100}\text{Fm}$.

Figur 7: Die radiale Dichteverteilung $|\psi r|^2 = r^2(f^2 + g^2)$
in fm^{-1} der beiden $9p_{1/2}$ - Elektronen im Atom $Z = 172$
als Funktion von r in fm . Die Parameter der Kernladungs-
dichteverteilung werden angegeben.

Figur 8: a) Der kritische Äquivalentradius einer Fermi - Ladungsverteilung mit $t = 2.2$ fm als Funktion von Z . b) und c) Energien des $1s$ - Zustandes als Funktion der Kernmassenzahl A und der Oberflächendicke t für einen Kern mit $Z = 171$.

Figur 9: Die Änderung der relativistischen HFS - Bindungsenergie für das $1s$ - Elektron bei $Z = 170$ als Funktion des Ionisationsgrades.

Figur 10: Im logarithmischen Maßstab werden die relativistischen HFS - Bindungsenergien im Bereich zwischen -1 keV und -1 MeV für verschiedene Elektronenzustände als Funktion der Ordnungszahl Z im Bereich $100 \leq Z \leq 173$ gezeigt.

Figur 11: Im linearen Maßstab werden die relativistischen HFS - Bindungsenergien im Bereich zwischen 0 und -45 eV für die äußersten Elektronen, die die chemischen Eigenschaften eines Systems charakterisieren, als Funktion der Ordnungszahl Z im Bereich $100 \leq Z \leq 170$ gezeigt.

Figur 12: Die totale Energie der Atome als Funktion der Ordnungszahl Z .

Figur 13: Die Bindungsenergien von Elektronen im Feld von zwei Uran - Kernen getrennt durch den Abstand R , berechnet unter Berücksichtigung der endlichen Kernaussdehnung. Die durchgezogenen Linien bezeichnen σ - Zustände, die gestrichelten π - Zustände (Ref. 36). Die strichpunktierten Linien sind Hartree - Fock - Slater (HFS) Approximationen zum $1s$ und $2p\sigma$ - Zustand. Als kritischer Radius resultiert $R_{\text{krit}}^{1s} = 27 \text{ fm}$ (Ref. 16).

Figur 14: Ladungsverteilungen $u_1^2 + u_2^2$ von Kontinuums-elektronen negativer Energie bei $Z = 180$ und einem Kernradius $R = 9 \text{ fm}$, wobei für die Kernladungsverteilung eine homogen geladene Kugel angenommen wurde. Der Energieeigenwert der in das negative Kontinuum eingebetteten K - Schale beträgt $E = -1.7455 m_e$. Links der gestrichelten Senkrechten wurde für das $1s$ - Niveau ein Skalierungsfaktor 10^{-2} eingeführt. Als Beispiel für eine Kontinuumslösung abseits der Resonanz wird $u_1^2 + u_2^2$ für $E = -1.5 m_e$ gezeigt.

Figur 15: a) Radiale Kopplungsmatrixelemente in natürlichen Einheiten des $1s\sigma$ zum $2s\sigma$, $3s\sigma$, $4s\sigma$ Zustandes im U - U System als Funktion des Abstandes beider Kerne. Die gestrichelten Linien sind ohne, die vollen mit Translationsfaktoren gerechnet. Die strichpunktierte Linie zeigt ein nichtrelativistisches $1s\sigma$ - $2s\sigma$ Matrixelement, skaliert für das U - U System. b) Das radiale

Kopplungsmatrixelement des $1s\sigma$ - Niveaus zu den Kontinuumszuständen (Energien in Einheiten der Elektronenmasse). Die Kontinuumszustände wurden in der Monopolnäherung berechnet (Ref. 63).

Figur 16: Radiale Kopplungsmatrixelemente in natürlichen Einheiten des $1s$ - Niveaus zu den Kontinuumszuständen im $Pb - Pb$ System, berechnet in der Monopolnäherung, als Funktion des Abstandes beider Kerne.

Figur 17: Radiale Kopplungsmatrixelemente in natürlichen Einheiten für das $Pb - Pb$ und das $U - U$ System, berechnet in der Monopolnäherung. Übergänge des $2p_{1/2}$, $2s$, $3s$ und $4s$ - Zustandes in Kontinuumszustände der Energie $E = 1.2$ und $4 m_e$ als Funktion des Abstandes beider Kerne wurden untersucht.

Figur 18: Die Abhängigkeit des minimalen Abstandes beider Kerne und des Stoßparameters b vom Schwerionenstreuwinkel θ für das $U - U$ System bei $E_{CM} = 800$ MeV.

Figur 19: Die zeitabhängige $1s - 2s$ Übergangswahrscheinlichkeit im $U - U$ System als Funktion des Abstandes beider Kerne bei $b = 0$, berechnet im Rahmen der zeitabhängigen Störungstheorie. Der Endzustand wurde als leer angenommen. Der minimale Abstand beträgt 15 fm. Es wurde die Monopolnäherung verwendet.

Figur 20: Die totale Wahrscheinlichkeit für Coulombanregung des $1s\sigma$ - Elektrons im U - U System in leere $ns\sigma$ - Niveaus und in das Kontinuum ($E\sigma$) bei Stoßparameter $b = 0$. Einschritt- und Mehrschrittprozesse wurden berücksichtigt. Ein starkes Anwachsen der Wahrscheinlichkeit setzt ein nachdem die Kerne den Punkt minimaler Annäherung überschritten haben (Ref. 63).

Figur 21: Stoßparameterabhängigkeit der asymptotischen und maximalen $1s - 2s$ Übergangswahrscheinlichkeit während des Stoßes für das U - U und das Pb - Pb System. Im Rahmen der zeitabhängigen Störungstheorie wurde die Monopolnäherung verwendet.

Figur 22: Das Elektronenspektrum in bezug auf die kinetische Elektronenenergie bei der direkten Ionisation des $1s$ - Niveaus für $b=0$ im Pb - Pb System. Die differentielle Wahrscheinlichkeit dW/dE wird in natürlichen Einheiten angegeben. Das Spektrum fällt exponentiell ab.

Figur 23: Energieabhängigkeit der Coulombionisation des $1s\sigma$ - Niveaus im U - U Quasimolekül beim Stoßparameter $b = 0$. Anregung in den $2s\sigma$, $3s\sigma$ und $4s\sigma$ - Zustand und in das Kontinuum (E) werden separat aufgezeigt. $f(n)$ bezeichnet die asymptotische Ionisationswahrscheinlichkeit, $d(n)$ die mittlere Wahrscheinlichkeit während des Eintauchbereiches des $1s\sigma$ - Zustandes in das untere

Kontinuum. b) Die Stoßparameterabhängigkeit der Coulombionisation des $1s$ - Niveaus bei $E_{\text{Lab}} = 1600 \text{ MeV}$. Die gleichen Bezeichnungen wie in a). (Ref. 63)

Figur 24: Die Stoßparameterabhängigkeit der direkten Coulombionisation des $1s$, $2p_{1/2}$, $2s$ und $3s$ - Niveaus im Pb - Pb und im U - U System unter Verwendung der Monopolnäherung.

Figur 25: Die maximale zeitabhängige Ionisationswahrscheinlichkeit während des Stoßes des $1s$, $2p_{1/2}$, $2s$ und $3s$ - Niveaus im Pb - Pb und im U - U System als Funktion des Stoßparameters.

Figur 26: Zwei - Photonen Feynman Diagramm zur Beschreibung von e^+, e^- - Erzeugung. Es gibt ein Austauschdiagramm hierzu, in dem Elektron- und Positronlinie vertauscht sind. b) Multi - Photon Diagramm zur Darstellung des kollektiven Charakters der Paarproduktion aus quasimolekularen Zuständen heraus. Die Kopplungskonstante ist $(Z_1 + Z_2)\alpha$. Die Kreuze in den Kernlinien kennzeichnen die Verwendung von äußeren Feldern.

Figur 27: a) Das Positronen- (durchgezogene Linie) und Elektronenspektrum (gestrichelte Linie) der Paarerzeugung in einem Blei - Blei Stoß bei $E_{\text{CM}} = 605 \text{ MeV}$.

b) Die Stoßparameterabhängigkeit $P(b)$ der Paarerzeugung im selben Stoß bei verschiedenen Ionenenergien, gekennzeichnet durch den minimalen Abstand der Kerne bei $b = 0$.

Figur 28: Das Positronenspektrum der induzierten und spontanen Positronen (durchgezogene Kurve) im U - U Stoß bei $E_{CM} = 800$ MeV ($L_0 = 0.01$). Die gestrichelte Kurve zeigt das direkte Positronenspektrum ($E_{CM} = 762$ MeV), wobei nur der Drehimpuls $\kappa = 1$ (p - Zustände) berücksichtigt wurde.

Figur 29: Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dE_x$ in bezug auf die Photonenenergie E_x für Dipol- und Quadrupol - Bremsstrahlung für die Systeme $^{238}\text{U} - ^{238}\text{U}$ bei $E_{Lab} = 1400$ MeV und $^{132}\text{Xe} - ^{238}\text{U}$ bei $E_{Lab} = 700$ MeV. Aufgrund des kleinen Dipolmomentes in den Systemen ist die Quadrupol Strahlung stets dominant. Die Spektren sind aufgetragen im Bereich $1 \text{ MeV} < E_x < 5 \text{ MeV}$, der relevant ist für den Paarerzeugungsprozeß.

Figur 30: Der differentielle Konversionskoeffizient $d\beta_{E2}/dE_+$ für Elektron - Positron Paarerzeugung für $\omega = 1.5$ MeV und $\omega = 4.086$ MeV, berechnet in der Born'schen Näherung.

Figur 31: Energien von geradzahligen Spinzuständen bis $I = 28^+$ der Grundzustandsbande $|I000\rangle$, der ersten

β - Bande $|1001\rangle$ und der ersten γ - Bande $|1200\rangle$ für ^{238}U nach dem Rotations - Vibrations Modell. Die verschiedenen $E2$ - Übergänge mit $\Delta E > 2m_e c^2$, die zur e^+, e^- - Paarerzeugung führen sind durch Pfeile angezeigt. (Ref. 73)

Figur 32: Obere Kurve: Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Summe von spontanen und induzierten Positronen im U - U Stoß als Funktion des Schwerionen CM - Streuwinkels θ_{ion} . Die K - Loch Erzeugungswahrscheinlichkeit wurde angenommen als $L_0 = 0.01$. Untere Kurve: Der entsprechende differentielle Wirkungsquerschnitt für die Positronen aus der Kern - Coulombanregung für das $^{238}_{92}\text{U} - ^{238}_{92}\text{U}$ System. Die durchgezogene Kurve zeigt das Resultat für $E_{\text{CM}} = 797 \text{ MeV}$, die gestrichelte Kurve für $E_{\text{CM}} = 609 \text{ MeV}$ ($R_{\text{min}} = 20 \text{ fm}$).

Figur 33: Der differentielle Paarbildungsquerschnitt in bezug auf den Schwerionenstreuwinkel θ_{ion} für a) ein nichtsymmetrisches System ($^{235}\text{U} - ^{238}\text{U}$) und b) einsymmetrisches System ($^{238}\text{U} - ^{238}\text{U}$). Die durchgezogene Linie kennzeichnet den Wirkungsquerschnitt für die e^+, e^- - Paare aufgrund des spontanen und induzierten Zerfalls des Vakuums. Die gestrichelten Linien geben den Hintergrund durch nukleare Coulombanregung berechnet mit Methode 1 (untere Kurve) und Methode 2 (obere Kurve) wieder.

Figur 34: Paarerzeugungswirkungsquerschnitte als Funktion der kinetischen Positronenergie. Die Bezeichnungen der Linien ist die dieselbe wie in Figur 33. Die strichpunktierte Linie gibt eine halbquantitative Abschätzung für die vernachlässigbare Paarerzeugungsrate durch Übergänge aus höheren Banden.

Figur 35: Elektron - Positron Paarerzeugung, wobei das Elektron leere gebundene Zustände besetzt, induziert durch nukleare Coulombanregung ist schematisch demonstriert. Als Beispiel wird die Bindungsenergie E_B des K - Elektrons im überkritischen U - U Quasimolekül als Funktion des internuklearen Abstandes r gegeben. Kern - Quadrupolübergänge und die entsprechenden elektronischen Übergänge in die 1s - Schale sind angezeigt.

Figur 36: K - Loch Produktionswahrscheinlichkeit durch innere Konversion induziert durch nukleare Coulombanregung in bezug auf den Schwerionenstreuwinkel in einem $^{235}\text{U} - ^{238}\text{U}$ Stoß.

Figur 37: Totale Photonen Emissionswirkungsquerschnitte resultierend aus der nuklearen Coulombanregung für das $^{238}\text{U} - ^{238}\text{U}$ System bei $E_{CM} = 800 \text{ MeV}$ für verschiedene Übergänge zwischen der Grundzustandsbande und der β - und γ - Vibrationsbande. Die Punkte geben sowohl die Übergangsenergie E_γ in keV als auch den totalen Photonenerzeugungsquerschnitt σ in barn für einen

bestimmten Übergang an. Die durchgezogenen und gestrichelten Linien sollen nur das Verfolgen einer Kaskade erleichtern. Zum Vergleich wurde das in 50 keV - Schritten integrierte quasimolekulare Spektrum ($L_0 = 0.01$) für L - zu K - Schalen Übergänge im U - U Stoß eingetragen. (Ref. 94)

Figur 38: Anzahl der äquivalenten Photonen $n(\omega)$ pro Energieintervall beim Paarerzeugungsprozeß berechnet für ein relativistisches Proton mit $\gamma = 200$.

Figur 39: $n(\omega)$ für einen Uran - Kern mit $E_{\text{kin}} = 2\text{GeV/Nucl.}$ beziehungsweise 931 MeV/Nucl. Das Spektrum fällt exponentiell ab.

Figur 40: Der Logarithmus der Anzahl der äquivalenten Photonen $n(\omega)$ pro Energieintervall berechnet für einen ^{10}Ne - Kern mit $E_{\text{kin}} = 2\text{ GeV/Nucl.}$ Als minimaler Stoßparameter wurde in das Photonenspektrum $b_{\text{min}} = \lambda = 386\text{ fm}$, relevant für die e^+, e^- - Erzeugung, sowie $b_{\text{min}} = 1.87 \lambda$ eingesetzt, was dem K - Schalenradius im U entspricht. Das Spektrum fällt exponentiell ab und zeigt eine deutliche Abhängigkeit von der Wahl von b_{min} .

Figur 41: Der differentielle Photopaarerzeugungsquerschnitt $d\sigma/dE_+$ im fm^2/MeV als Funktion der totalen Positronenenergie E berechnet nach der Bethe - Heitler Formel ($Z_2 = 98$)

für a) $\omega = 2$ MeV b) $\omega = 10$ MeV c) $\omega = 100$ MeV und d) $\omega = 1$ GeV. Die Symmetrie der Querschnitte resultiert aus der Verwendung von ebenen Wellen. Für $\omega > 10$ MeV bilden sich zwei Maxima aus.

Figur 42: Der totale Querschnitt σ in barn für die Photopaarerzeugung an einem ${}_{98}\text{Cf}$ - Kern als Funktion der Photonenenergie ω . Für $\omega > 10$ MeV zeigt der Querschnitt einen logarithmischen Anstieg.

Figur 43: Der totale Wirkungsquerschnitt für die direkte e^+, e^- - Erzeugung im Stoß eines relativistischen Protons ($\gamma = 200$) an einem Target mit einer effektiven Ordnungszahl von $Z_2 = 21.4$ als Funktion der oberen Integrationsgrenz $\omega_{\max}$. Als Endergebnis folgt $\sigma = 25$ mb.

Figur 44: Der totale Wirkungsquerschnitt für die direkte e^+, e^- - Erzeugung im Stoß zweier U - Kerne mit $\gamma = 2$ als Funktion der oberen Integrationsgrenze $\omega_{\max}$. Als Endergebnis folgt für $b_{\min} = \lambda_e$ $\sigma = 0.6$ barn. Der Querschnitt $\sigma(\omega_{\max})$ zeigt eine gute Konvergenz für $\omega_{\max} > 4$ MeV. Es werden also fast ausschließlich niederenergetische Leptonen erzeugt.

Figur 45: Der totale Wirkungsquerschnitt für die direkte e^+, e^- - Erzeugung im Stoß zweier U - Kerne als Funktion einer skalierten kinetischen Einschußenergie $\gamma - 1$. Als obere Integrationsgrenze wurde stets $\omega'_{\max} = 15$ MeV eingesetzt. In dem aufgezeigten, relativ

niederenergetischen Bereich zeigt σ eine starke Abhängigkeit von der Einschußenergie. Für eine genaue theoretische Bestimmung des Querschnittes zur Paarerzeugung ist eine exakte Berechnung der Feynman - Diagramme notwendig.

Figur 46: Der differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dw$ in bezug auf die Energie der äquivalenten Photonen für die direkte e^+, e^- - Produktion in einem Ne - U Stoß mit einer kinetischen Projektilenergie von $E = 2 \text{ GeV/Nucl.}$ Als integriertes Ergebnis erhält man $\sigma = 56 \text{ mb.}$ $d\sigma/dw$ zeigt eine exponentielle Abhängigkeit.

Figur 47: Der differentieller Querschnitt $d\sigma/dE_t$ in bezug auf die übertragene kinetische Energie bei der K - Schalen Ionisation im $^{10}\text{Ne} - ^{92}\text{U}$ Stoß mit einer kinetischen Projektilenergie von $E = 2 \text{ GeV/Nukl.}$ Die Kurve wurde nach der McKinley - Feshbach Formel berechnet. Als totaler Ionisationsquerschnitt resultiert $\sigma = 475 \text{ barn.}$ Etwa 1% der erzeugten Elektronen haben Energien von $E_t > 4 \text{ MeV.}$

Figur 48: Der totale Wirkungsquerschnitt σ in kbarn für die e^+, e^- - Erzeugung in einem relativistischen U - U Stoß als Funktion der kinetischen Ionenenergie E in GeV/Nukl. berechnet nach Formeln von Landau et al., Racah

und Nishina et al.. Der Unterschied zwischen den verschiedenen Kurven zeigt, daß die Querschnitte nur logarithmische Genauigkeit haben. Die Ausdrücke von Racah und Nishina, die als führenden Term die Landau Formel beinhalten, werden für $E < 2.5 \text{ GeV/Nukl.}$ beziehungsweise $E < 17 \text{ GeV/Nukl.}$ unphysikalisch negativ, woraus die Notwendigkeit einer exakten Berechnung des Zwei - Photonen Prozesses resultiert.

Figur 49: Der totale Wirkungsquerschnitt σ für die e^+, e^- - Erzeugung durch zwei Photonen als Funktion der Invarianten $W^2 = (p_+ + p_-)^2$ in MeV^2 . Im Schwerpunktsystem des erzeugten Paares gilt $W^2 = 4 E_+^2 = 4 E_-^2$. Als Parameter für die virtuellen Photonen wurde $q^2 = 10^{-3} \text{ MeV}^2$, 1 MeV^2 und 10^3 MeV^2 mit $q^2 = q_1^2 = q_2^2$ gewählt. a) Paarerzeugung durch zwei reelle Photonen ($q_1^2 = q_2^2 = 0$). b) Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{TT} für die e^+, e^- - Erzeugung durch zwei transversal polarisierte virtuelle Photonen. Für $q^2 = 10^{-3} \text{ MeV}^2$ ist der Unterschied von σ_{TT} zum Querschnitt σ aus a) vernachlässigbar gering. Die Querschnitte nehmen mit zunehmenden Abstand von der Massenschale ab. c) Der totale Wirkungsquerschnitt für die e^+, e^- - Erzeugung durch ein transversal polarisiertes Photon und ein Photon mit einer longitudinalen oder skalaren Polarisation. d) Paarerzeugungsquerschnitt σ_{SS} durch zwei longitudinal oder skalar polarisierte Photonen. Für $q^2 < 0.01 \text{ MeV}^2$ ist σ_{TT} absolut dominant.

Tabellenbeschreibung

Tabelle 1: Elektronische Übergangsraten in eV für die Elemente $Z = 114$ und 126 . Die K -, L - und M - Schale wird als Endzustand betrachtet (Abszisse), der Anfangszustand (Ordinate) variiert vom 2s - bis zum $4f_{7/2}$ - Niveau. Die Striche bedeuten, daß entweder die betreffenden Übergänge energetisch nicht erlaubt sind oder nicht betrachtet wurden, weil sie zu klein sind.

Tabelle 2: Dasselbe wie in Tabelle 1 für die Elemente $Z = 134$ und 145 .

Tabelle 3: Dasselbe wie in Tabelle 1 für die Elemente $Z = 164$ und 173 .

Tabelle 4: Dasselbe wie in Tabelle 1 für die Elemente $Z = 112$ und 158 .

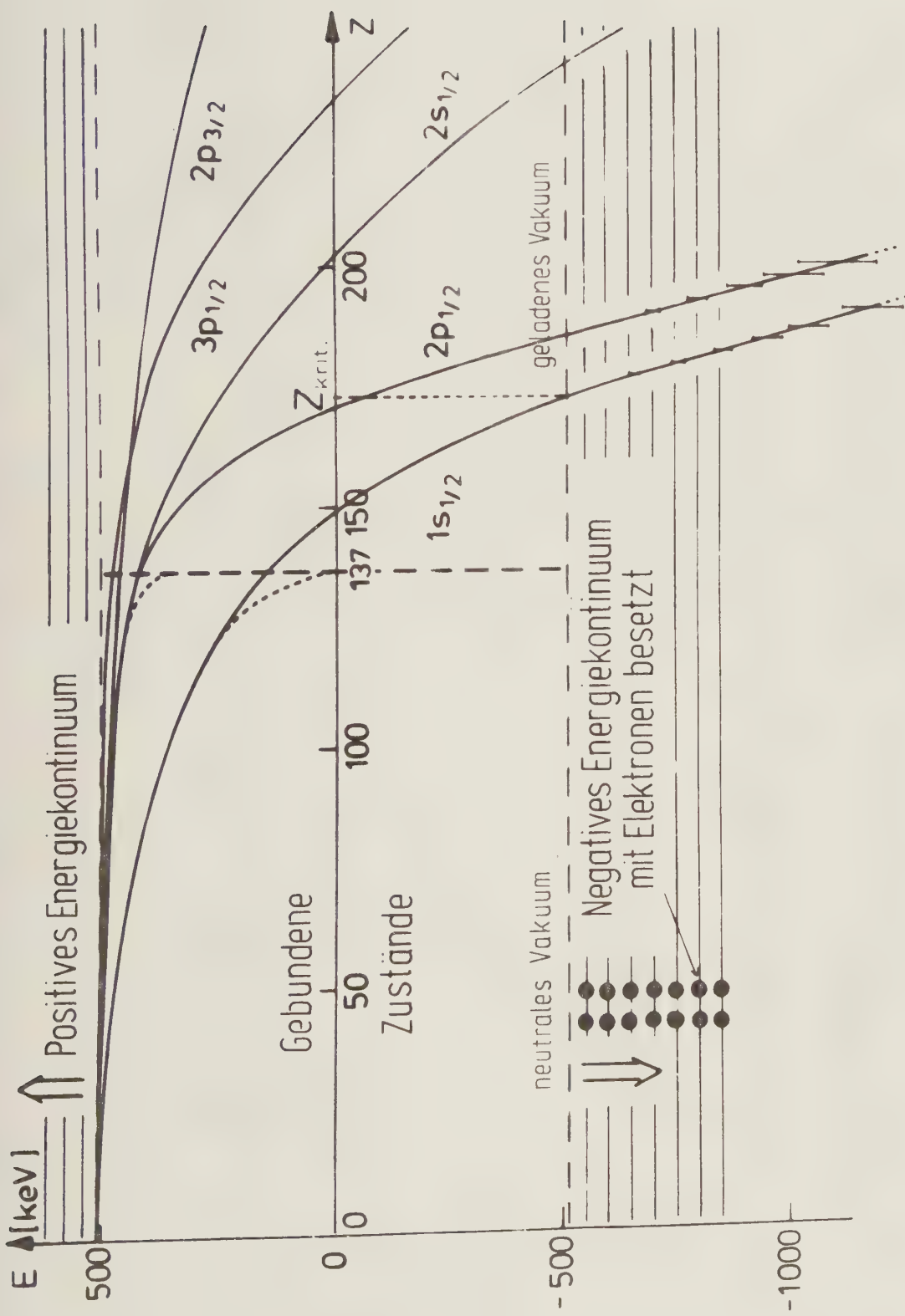
Tabelle 5: Die radialen Erwartungswerte $\langle R \rangle$ und $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ in fermi für die superschweren Elemente $Z = 114, 126, 134, 145, 164$ und 173 für elektronische Zustände der K -, L -, M - und N - Schale.

Tabelle 6: Dasselbe wie in Tabelle 5 für die Elemente $Z = 112$ und 158 .

Tabelle 7: Die in den Rechnungen zu den elektronischen Übergangsraten berücksichtigten Multipolaritäten.

Tabelle 8: Positronenproduktion induziert durch nukleare Coulombanregung für das System $^{238}_{92}\text{U} - ^{238}_{92}\text{U}$ mit $E_{\text{CM}} = 797 \text{ MeV}$. Die Coulombanregungswahrscheinlichkeiten P_n^{C} bei $\theta_{\text{ion}} = 180^\circ$ werden separat für jeden Übergang in die Grundzustandsbande mit $\Delta E > 2m_e c^2$ angegeben sowie der totale und differentielle Querschnitt bei $\theta_{\text{ion}} = 180^\circ$ für die resultierende Paarerzeugung. Die entsprechende Photon - Emissionswahrscheinlichkeit P_γ und der Konversionskoeffizient $\beta_{\text{E}2}(\Delta E)$ für elektrische Quadrupol - Strahlung kann den Spalten 4 und 5 entnommen werden.

Tabelle 9: Totale Wirkungsquerschnitte (letzte Spalte) für die Konversionspositronen resultierend aus der Coulombanregung des ersten 2^+ - Zustandes von sphärischen Targetkernen, beschrieben durch das harmonische Quadrupol - Vibrator Modell, für verschiedene Systeme. Die Coulombanregung des Xe - Projektils wurde vernachlässigt. Spalte 3 gibt den Konversionskoeffizienten $\beta_{\text{E}2}(\Delta E)$ für elektrische Quadrupol - Strahlung für den betreffenden Übergang an, Spalte 4 den totalen Coulombanregungsquerschnitt $\sigma_{\text{C}}^{2^+}$ in mb.



Figur 1

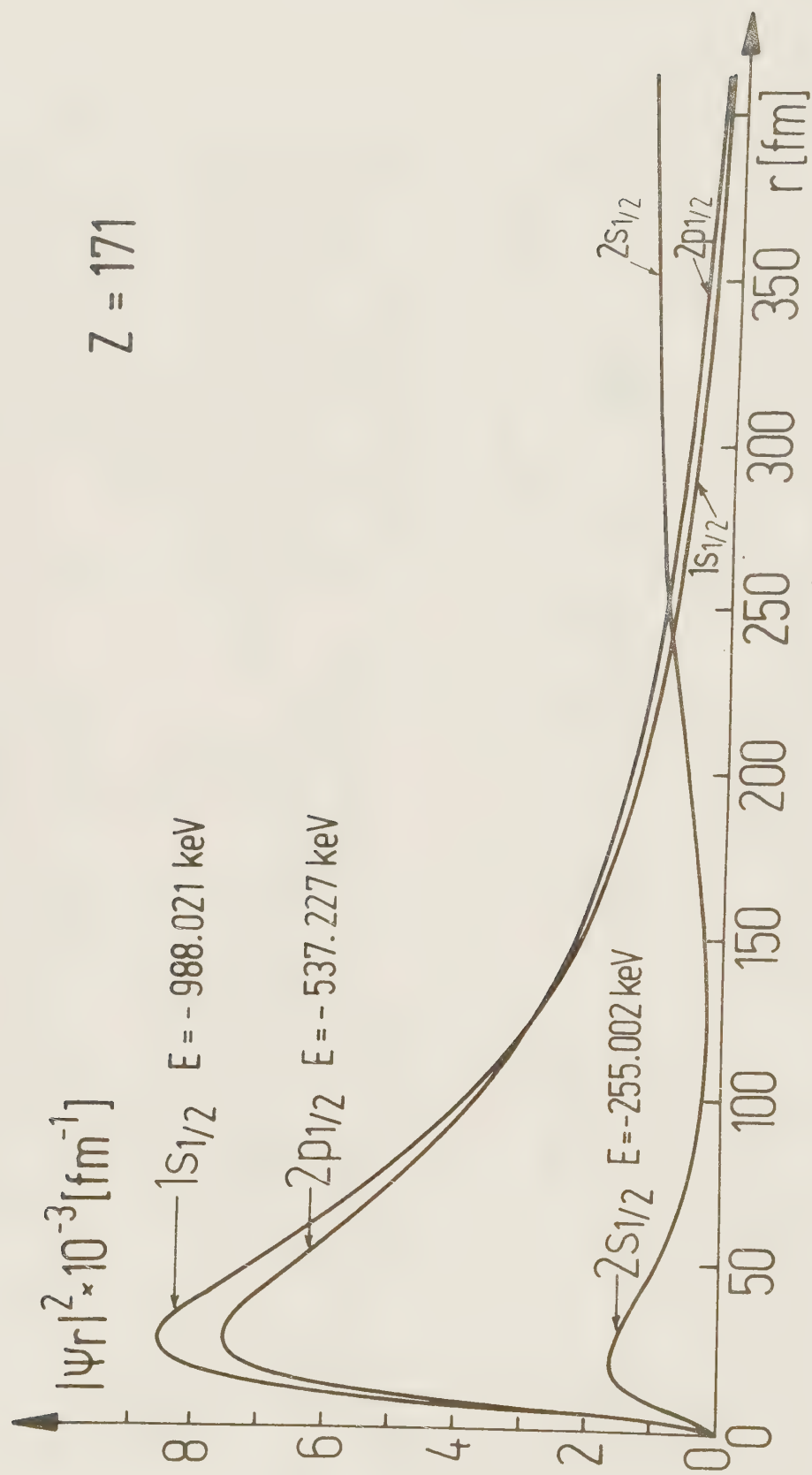
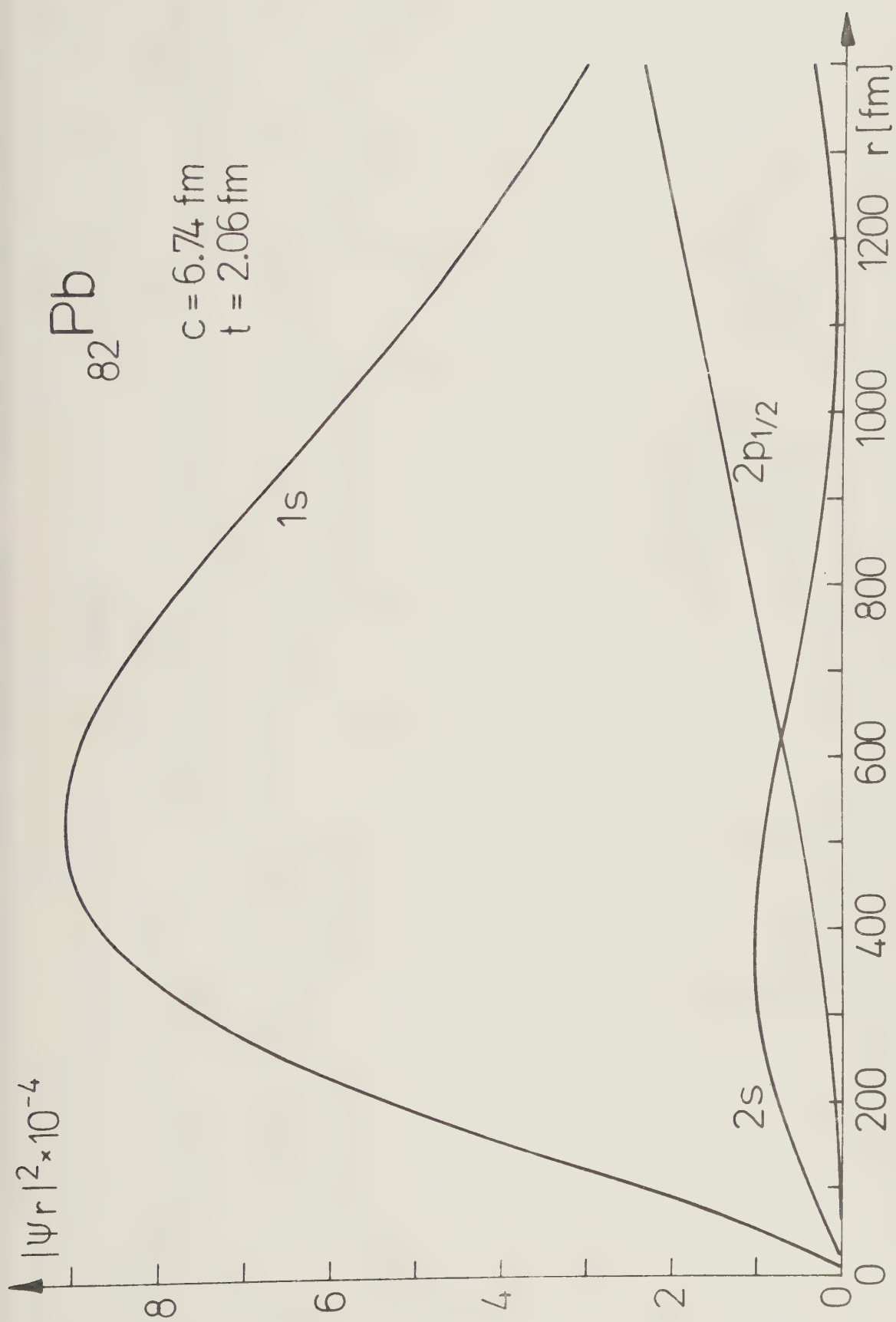
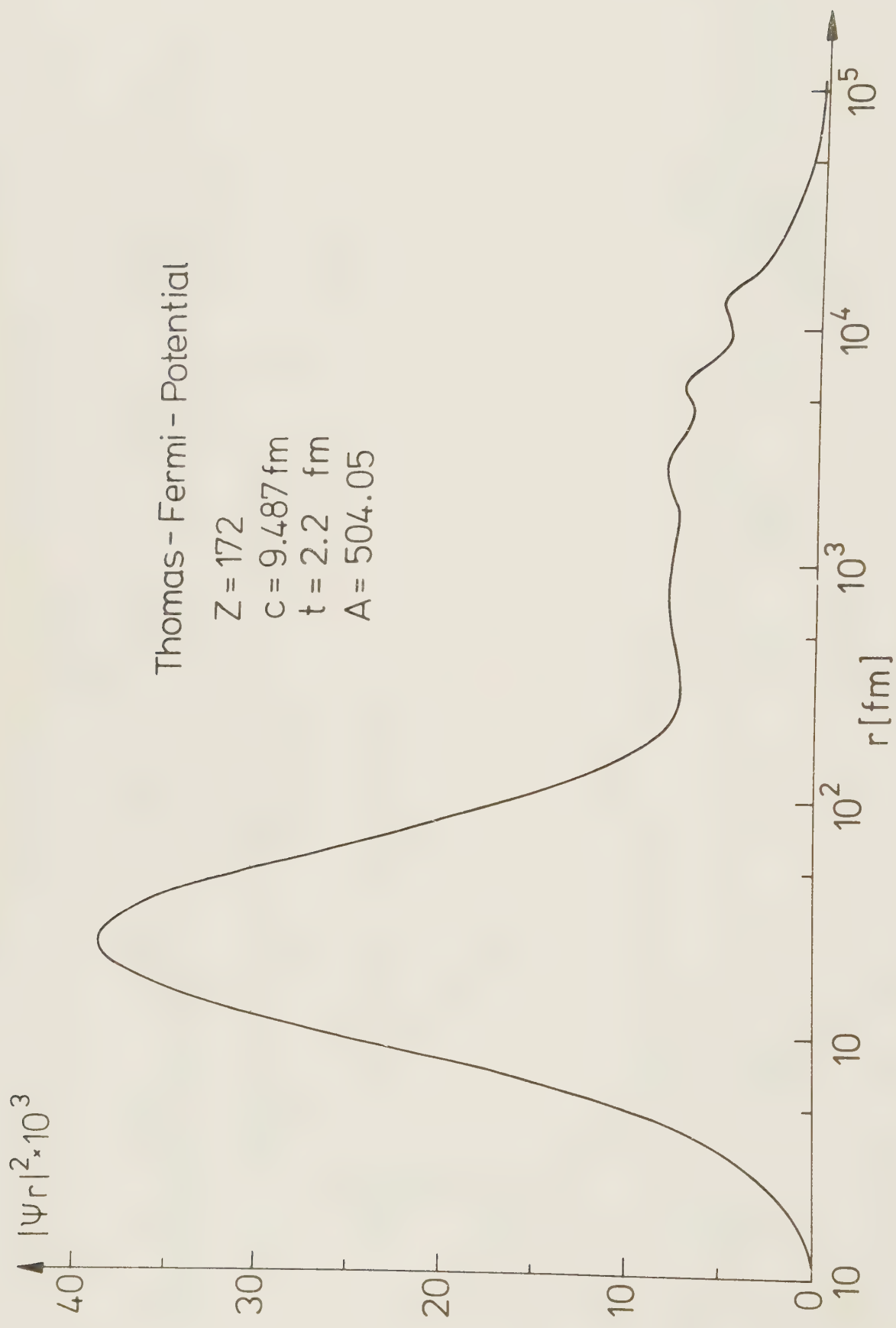


Figure 2



Figur 3



Thomas - Fermi - Potential

$Z = 172$
 $c = 9.487 \text{ fm}$
 $t = 2.2 \text{ fm}$
 $A = 504.05$

Figur 4

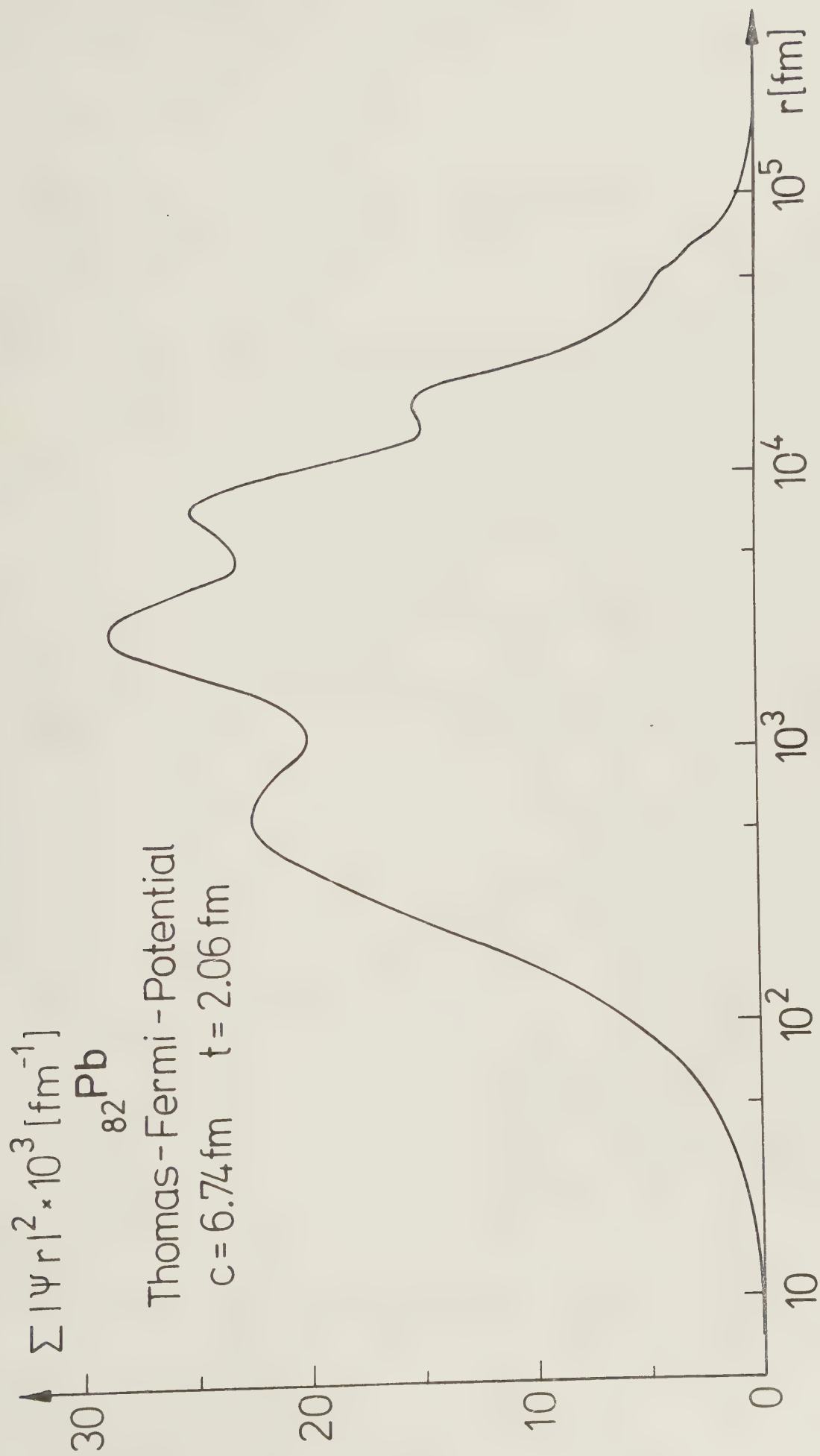
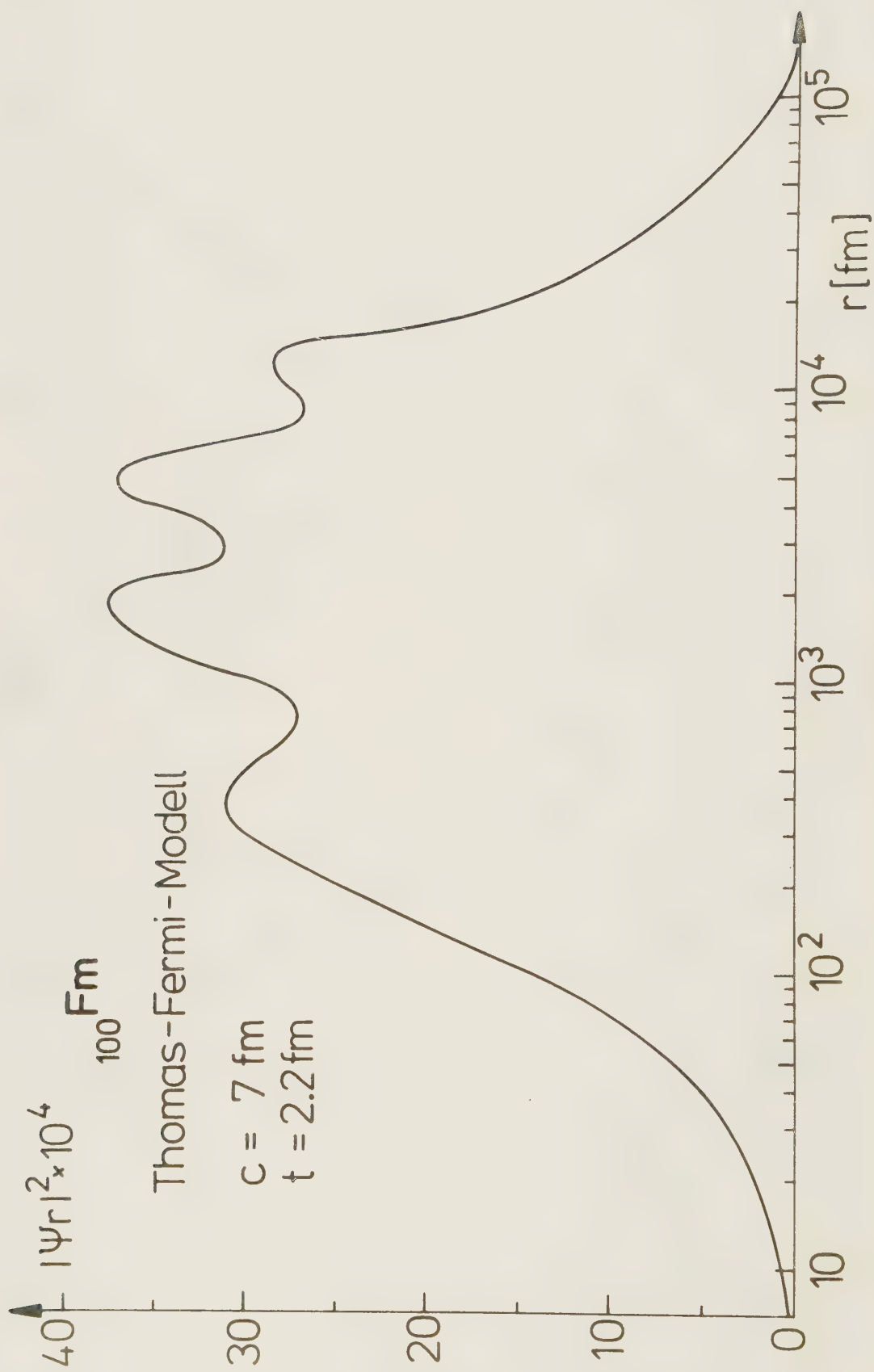


Figure 5



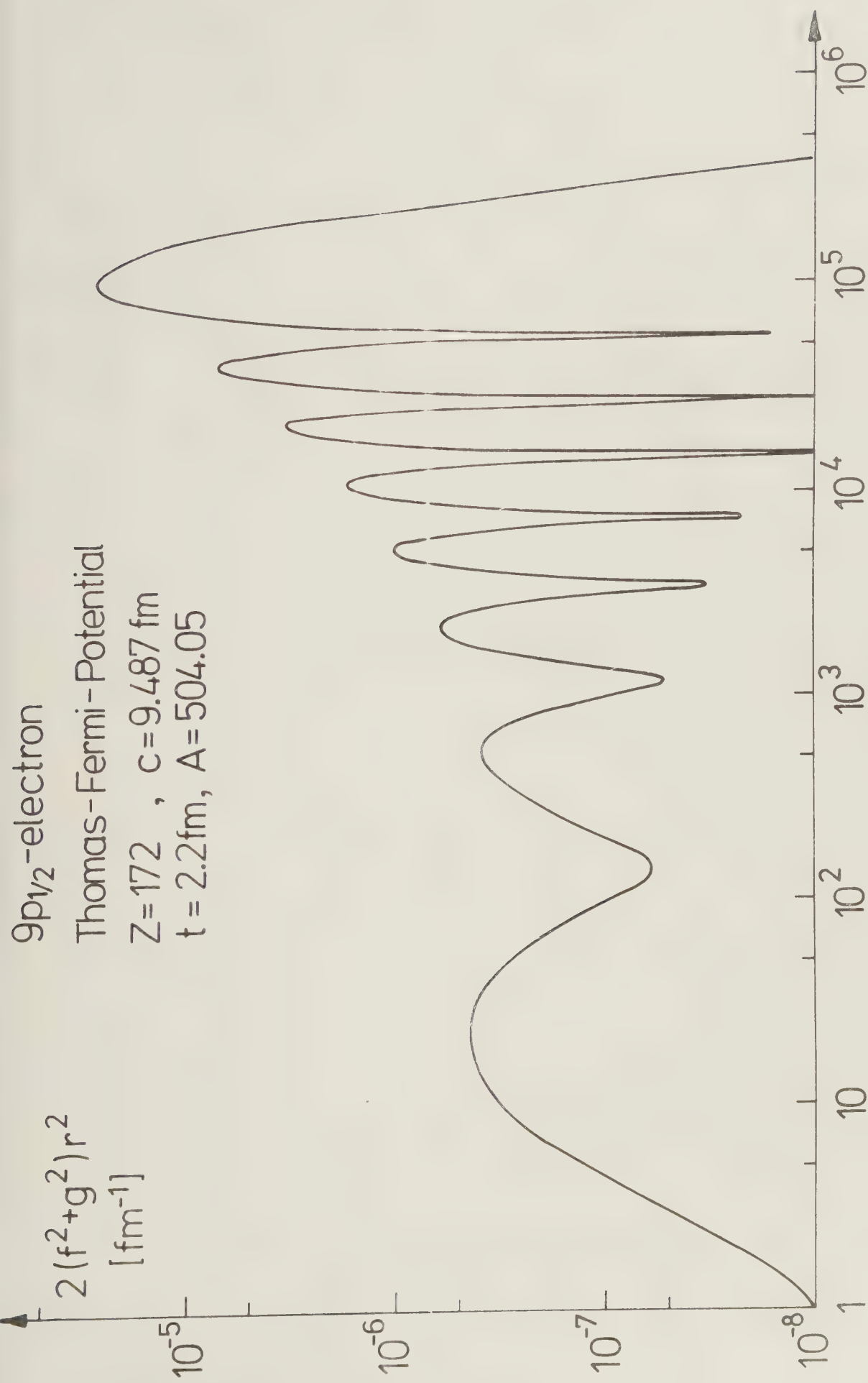
Figur 6

9p_{1/2}-electron

Thomas-Fermi-Potential

Z=172, c=9.487 fm

t=2.2fm, A=504.05



Figur 7

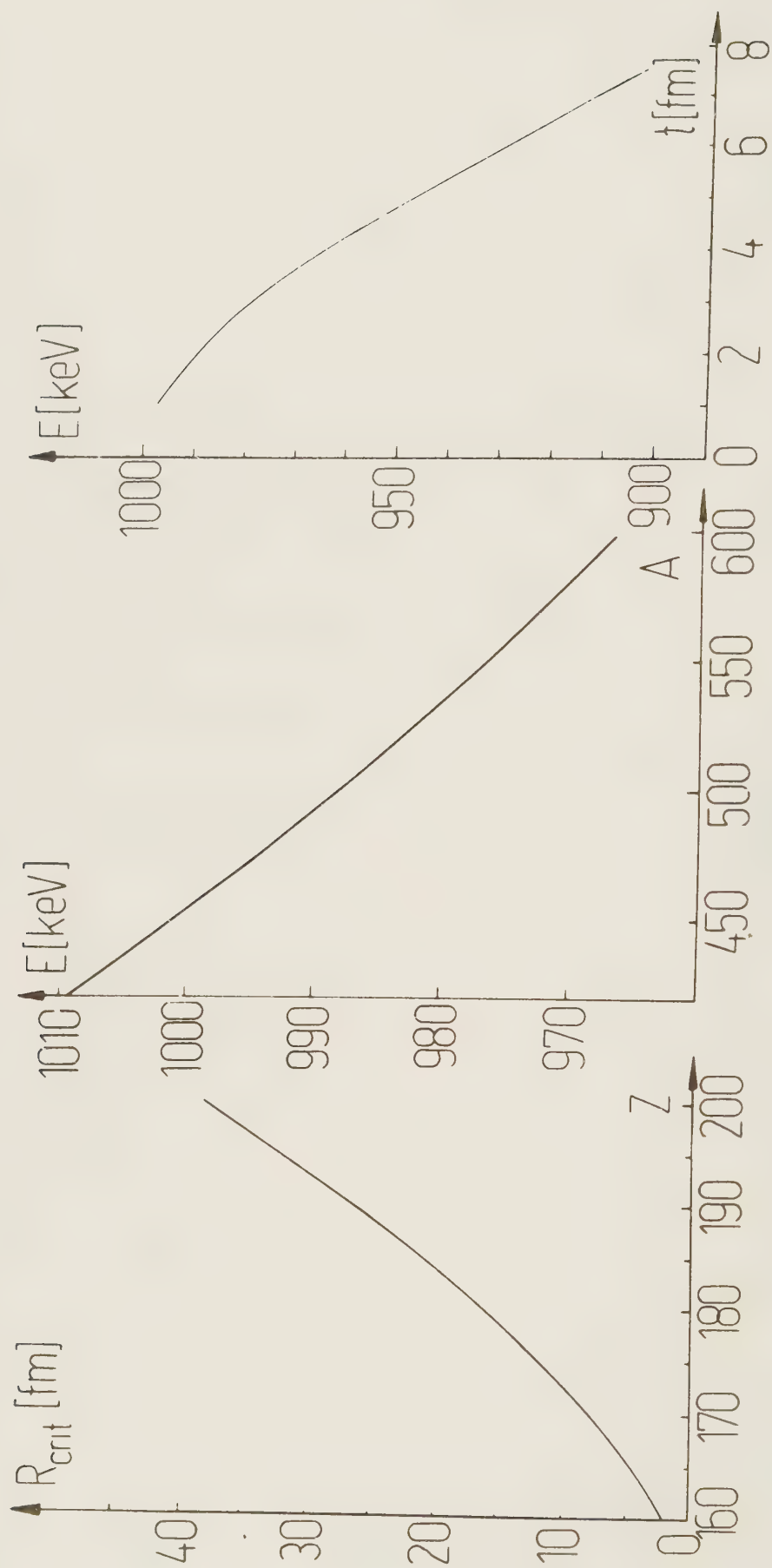
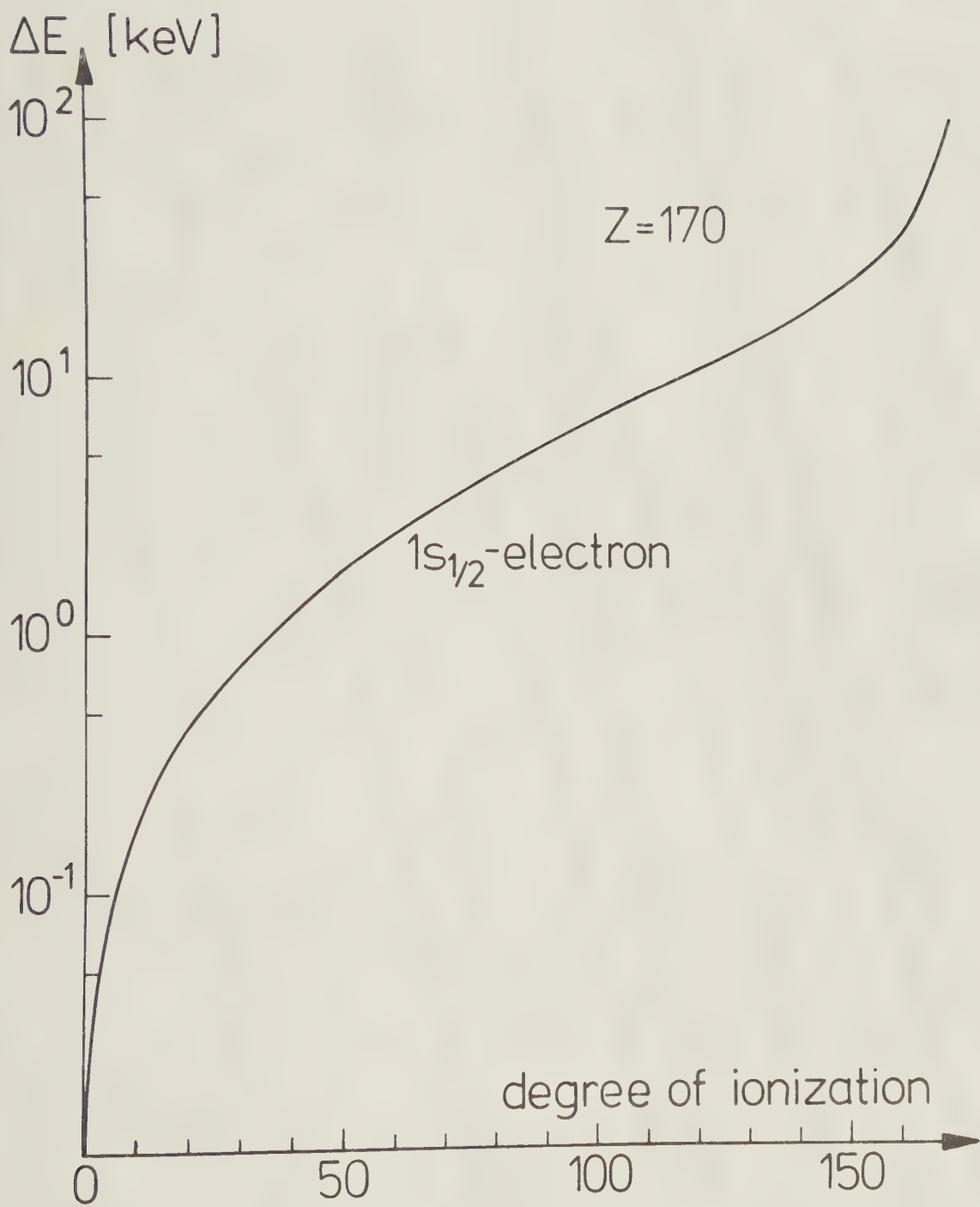


Figure 8



Figur 9



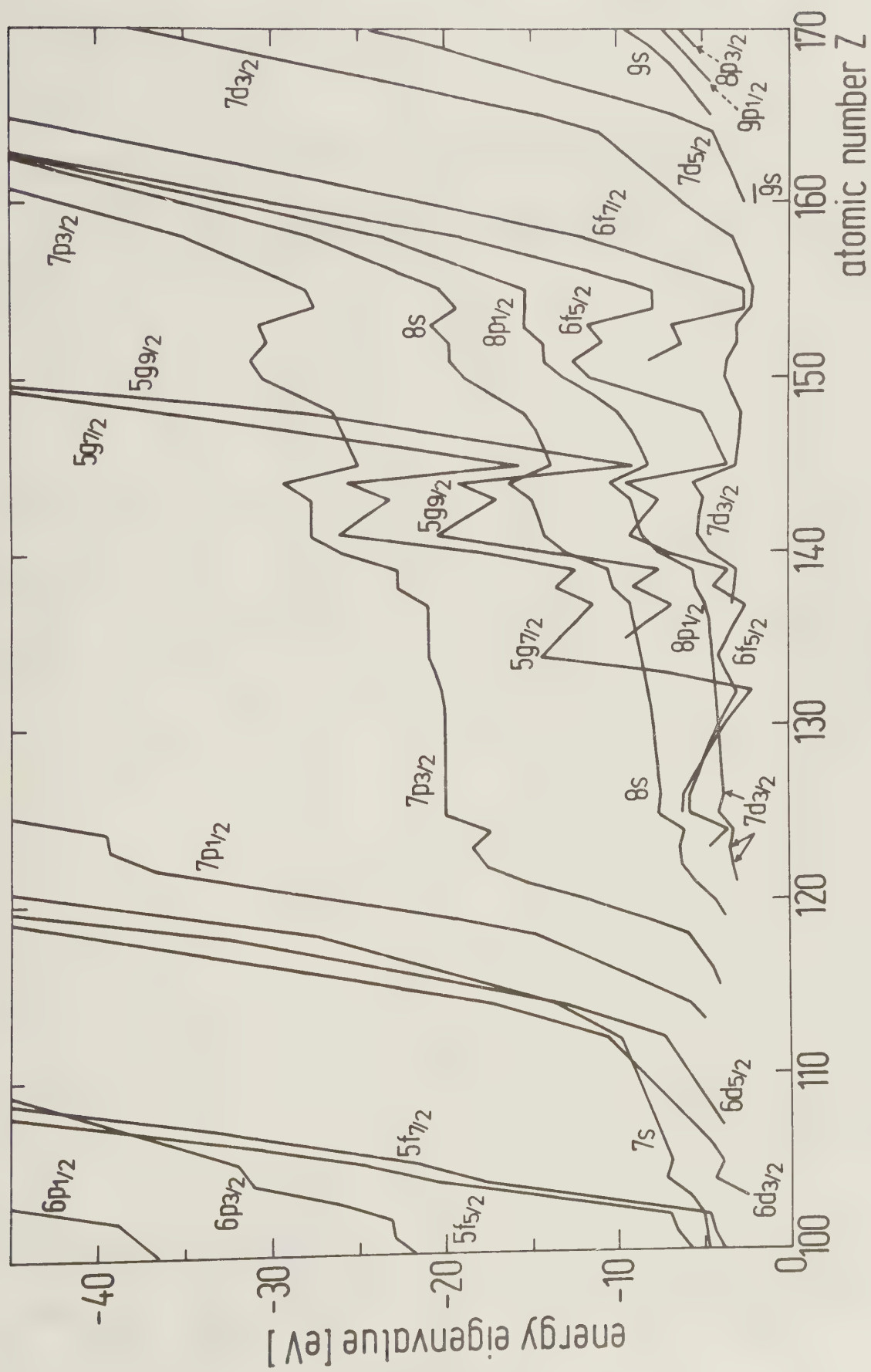
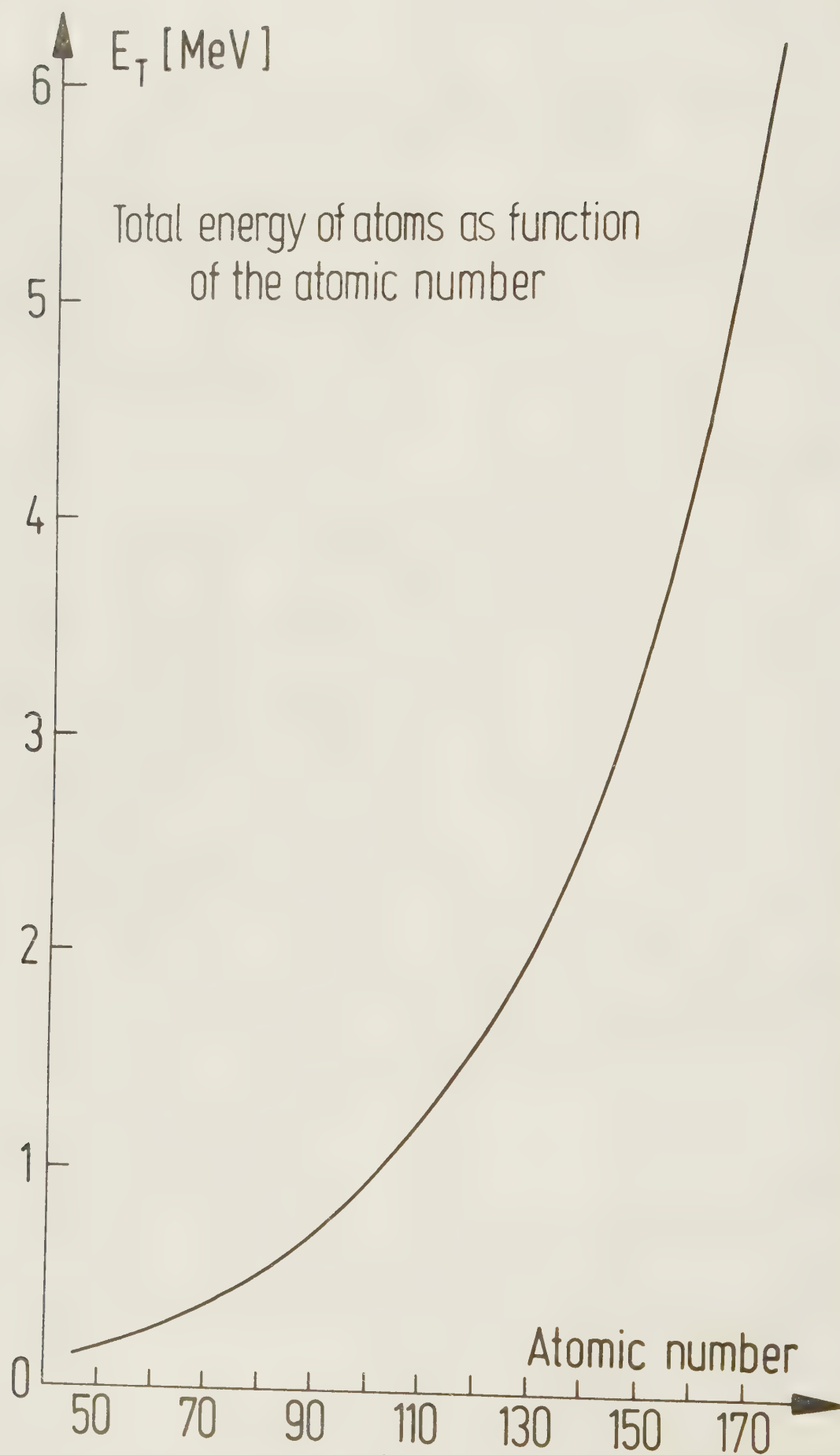
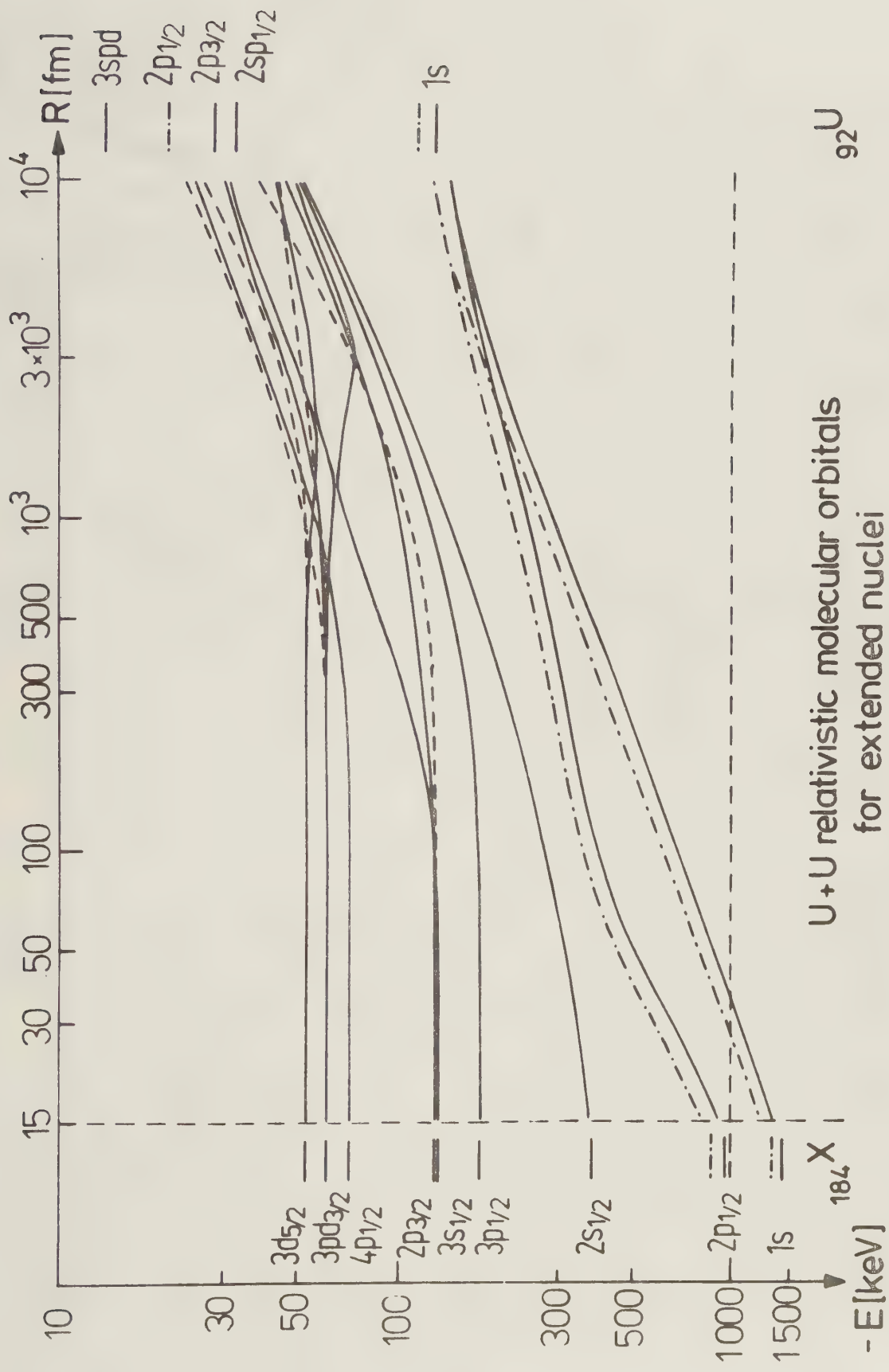


Figure 11

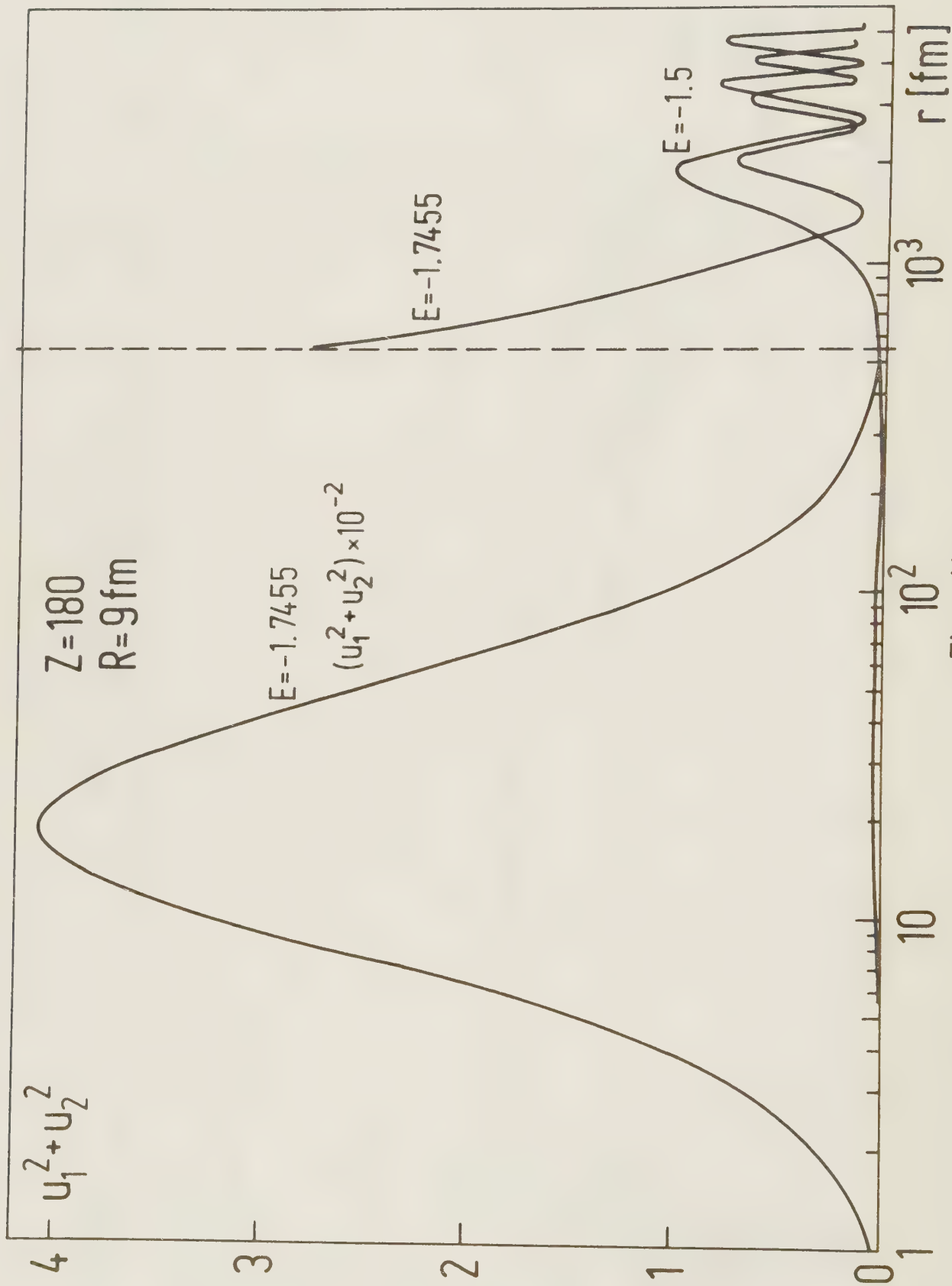


Figur 12



$U+U$ relativistic molecular orbitals
for extended nuclei

Figure 13



Figur 14

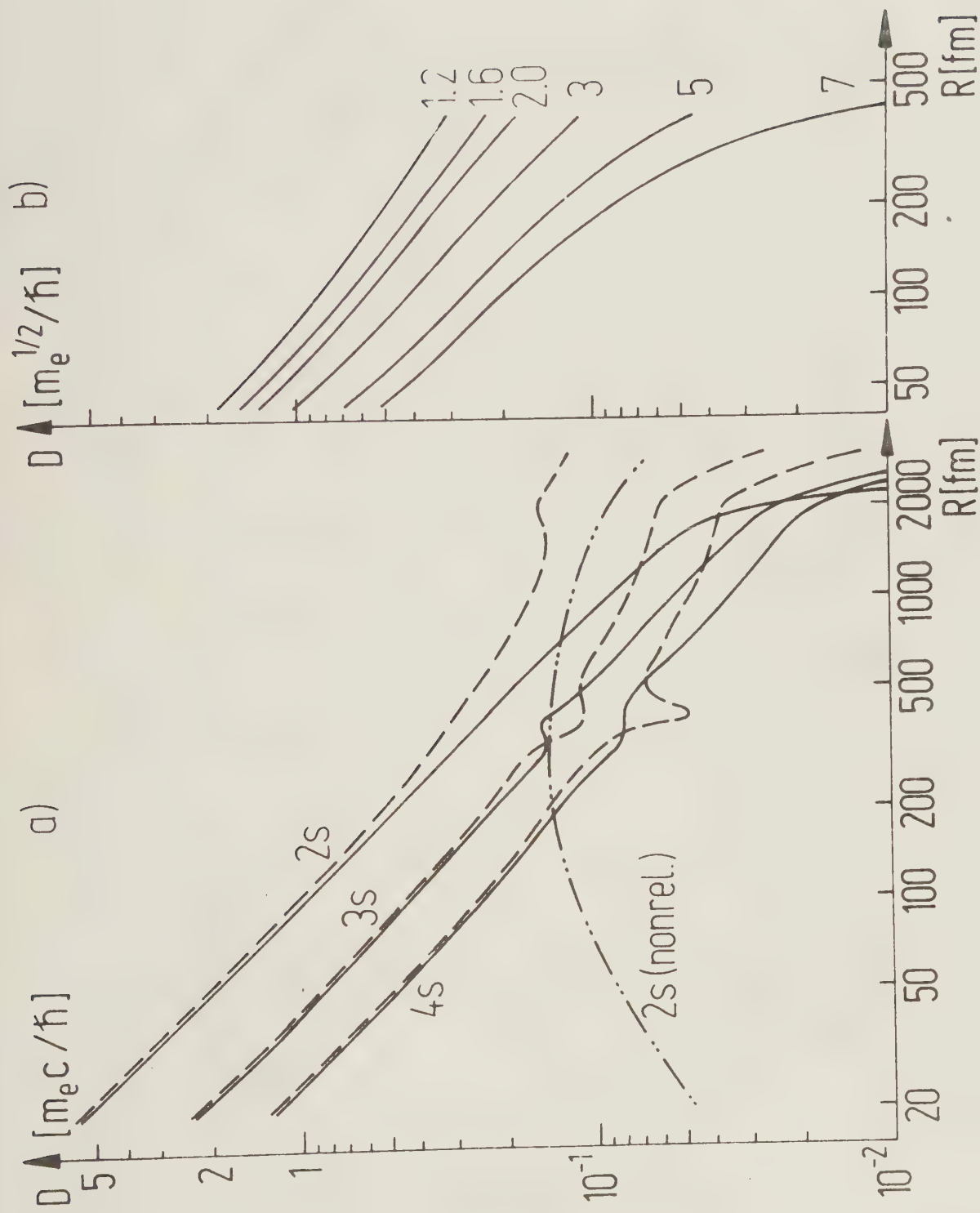
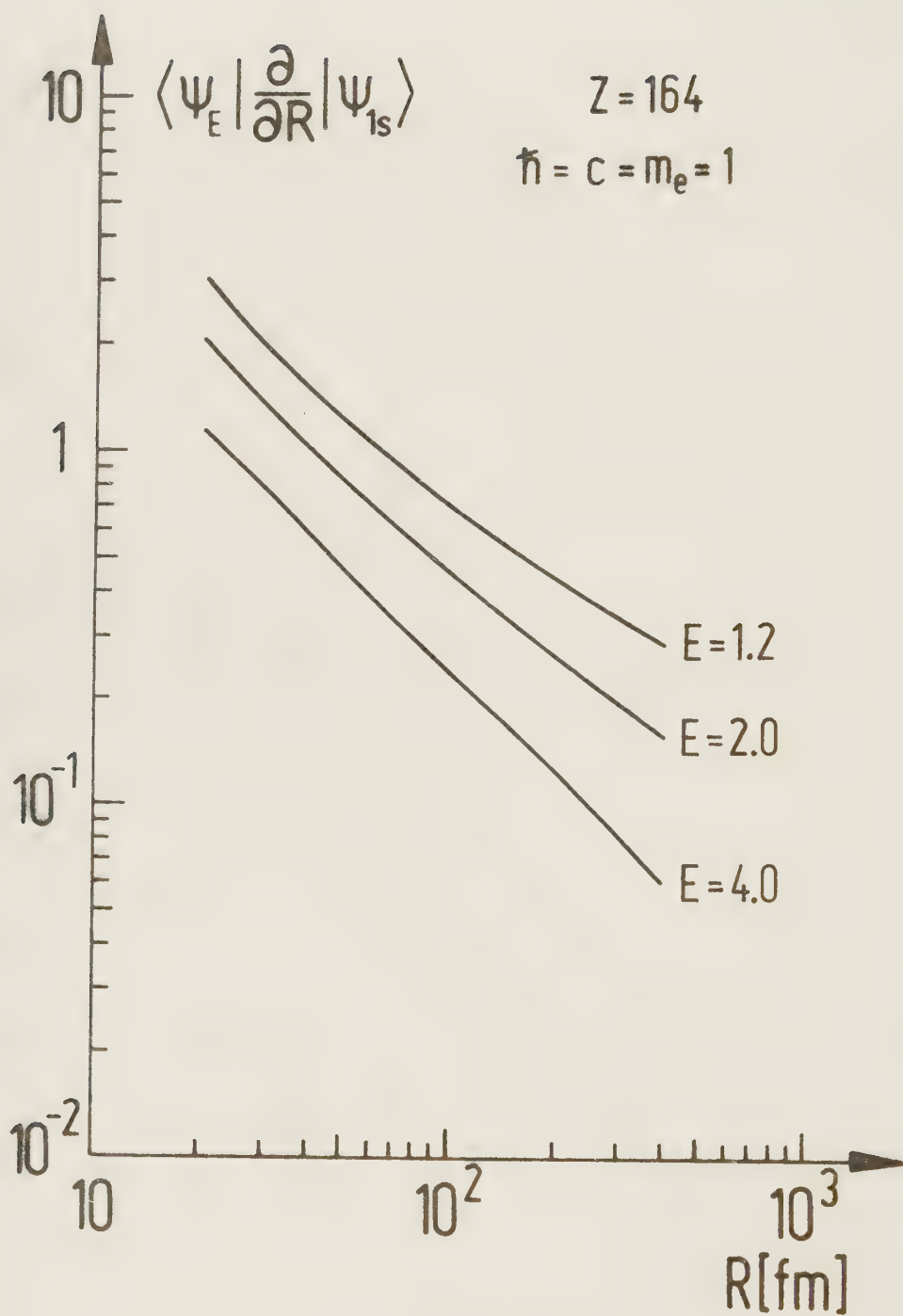


Figure 15



Figur 16

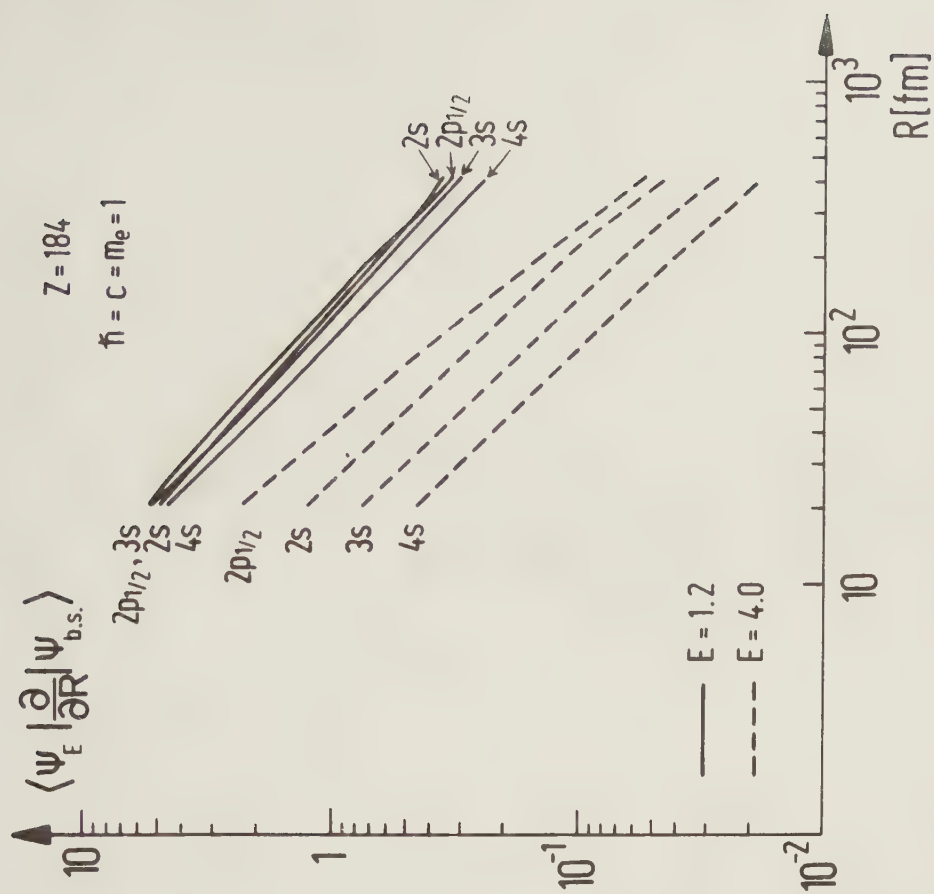
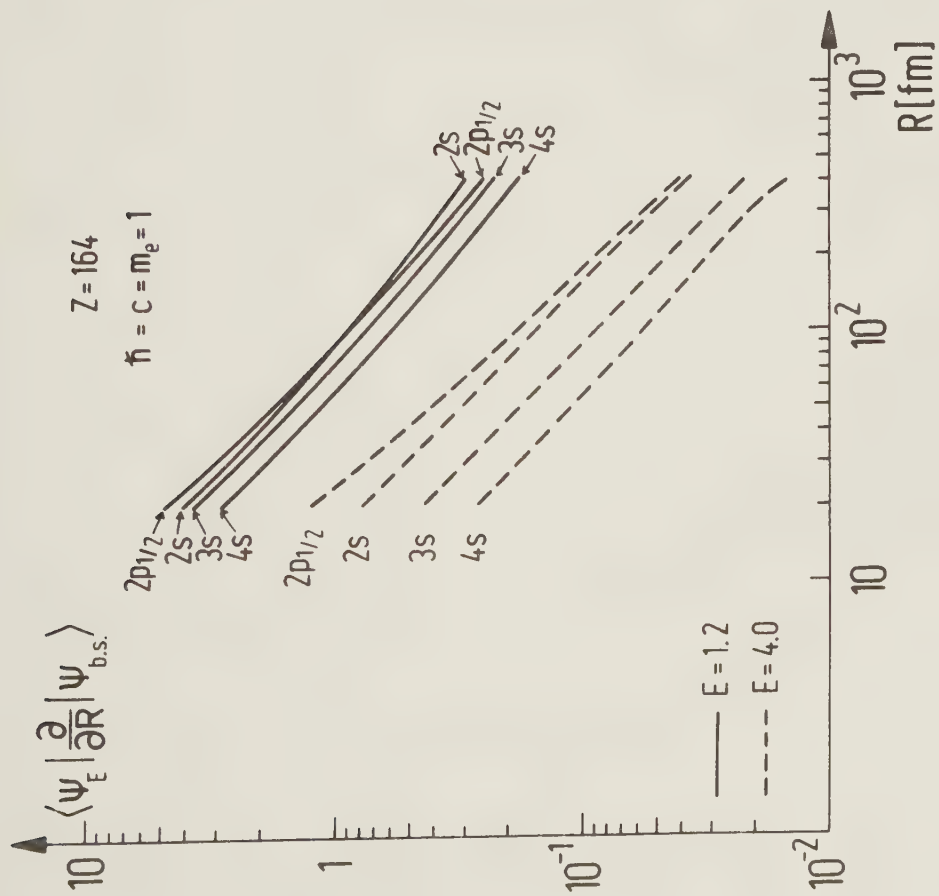
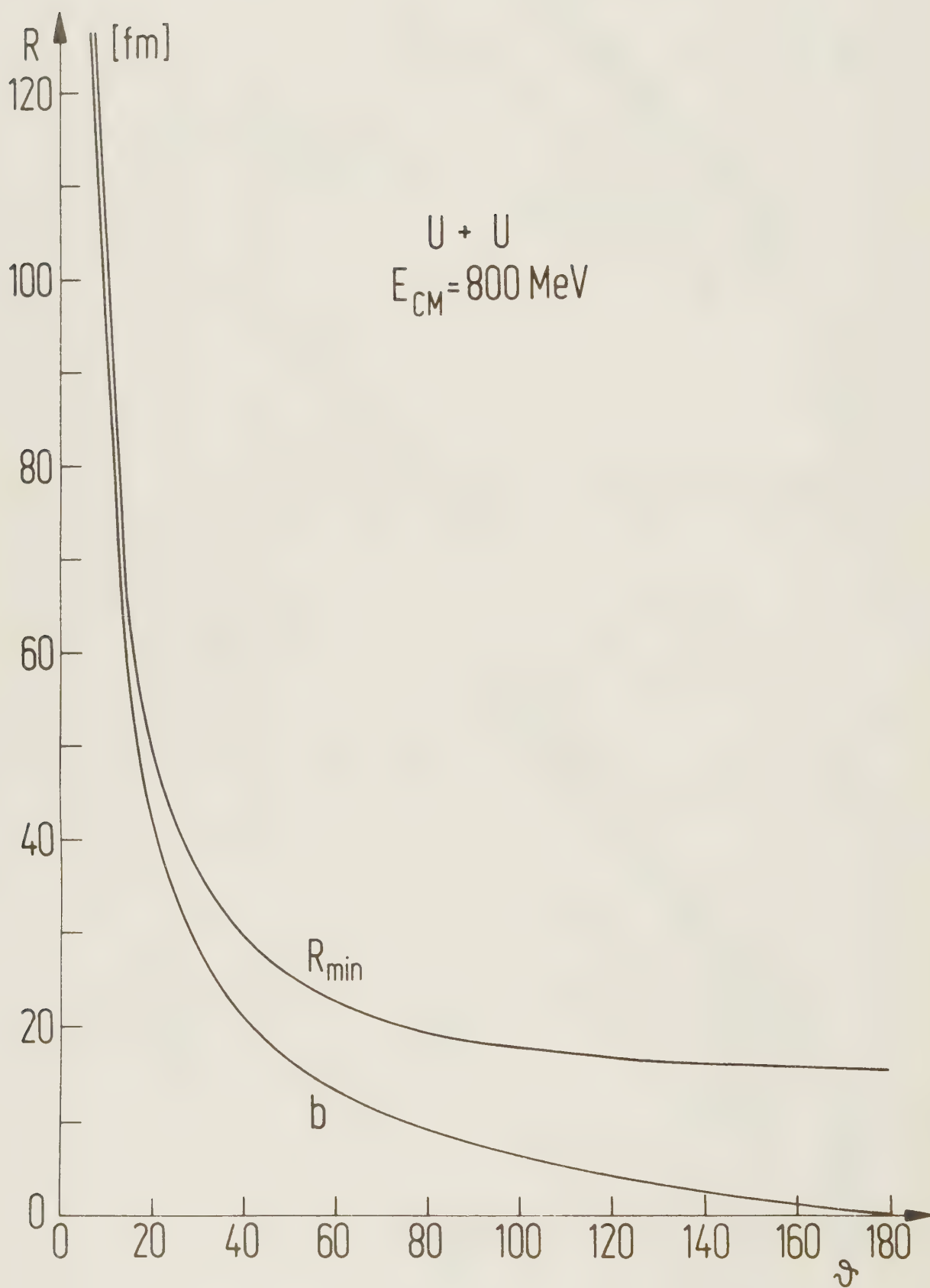
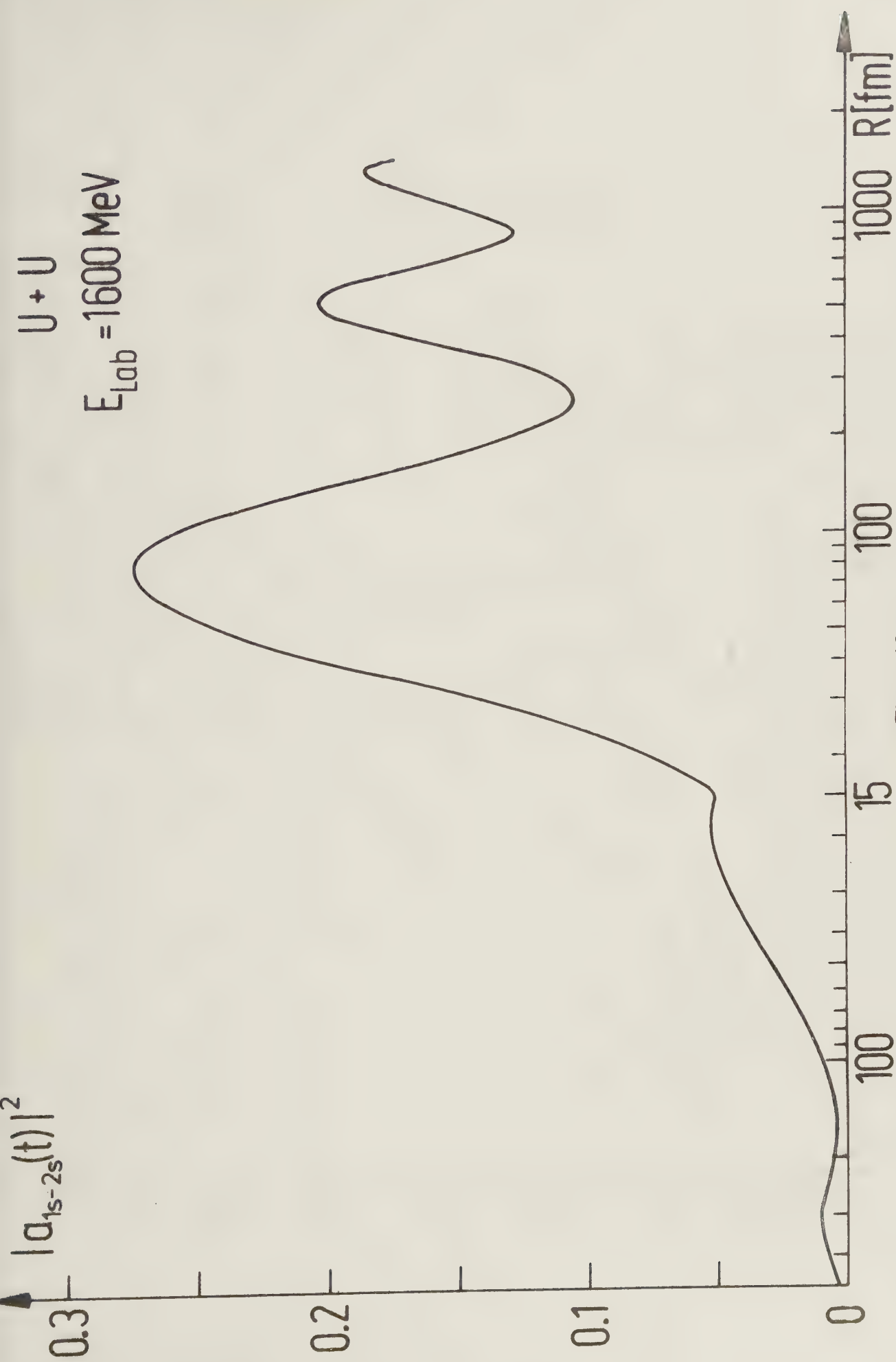


Figure 17



Figur 18



Figur 19

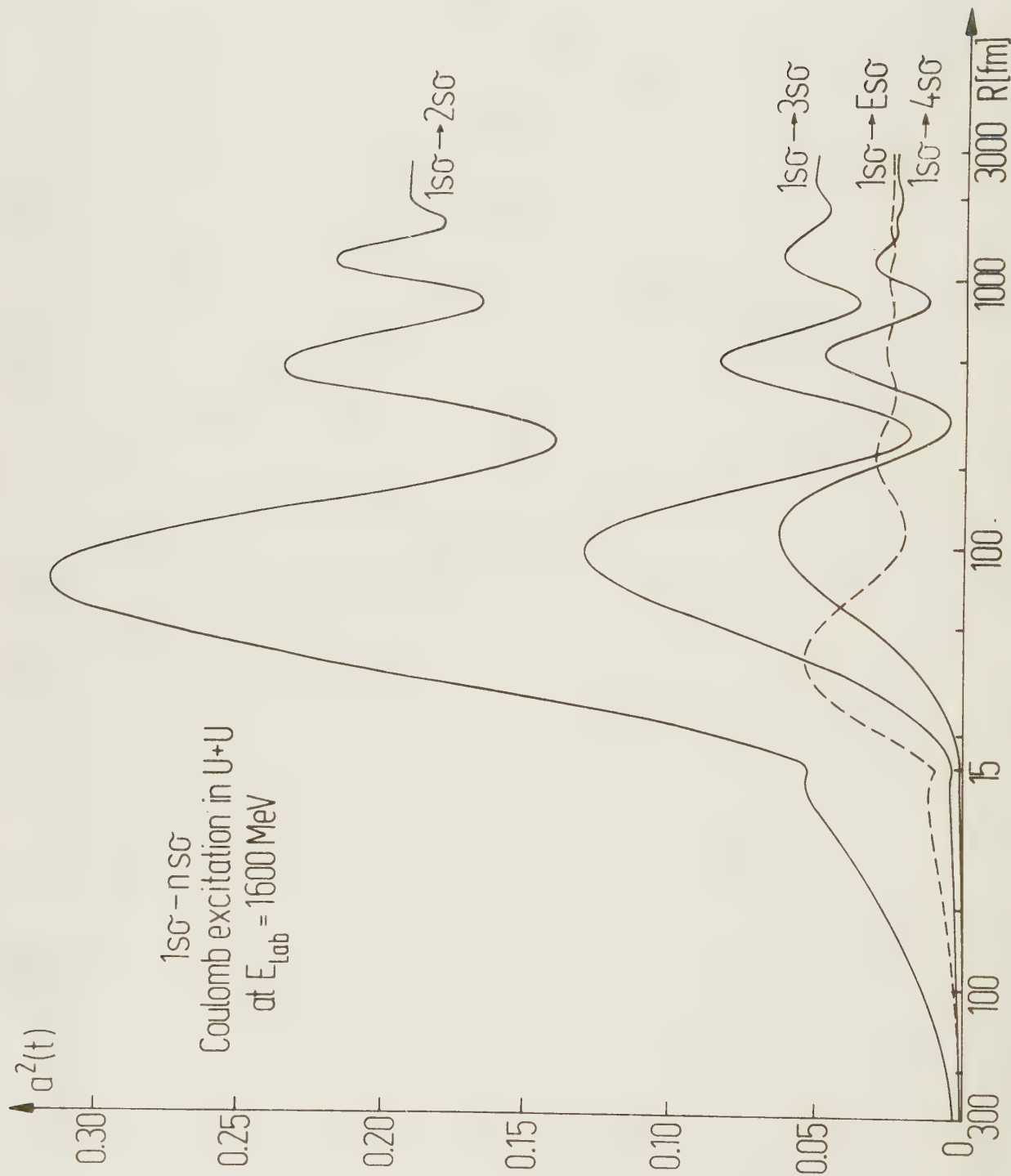
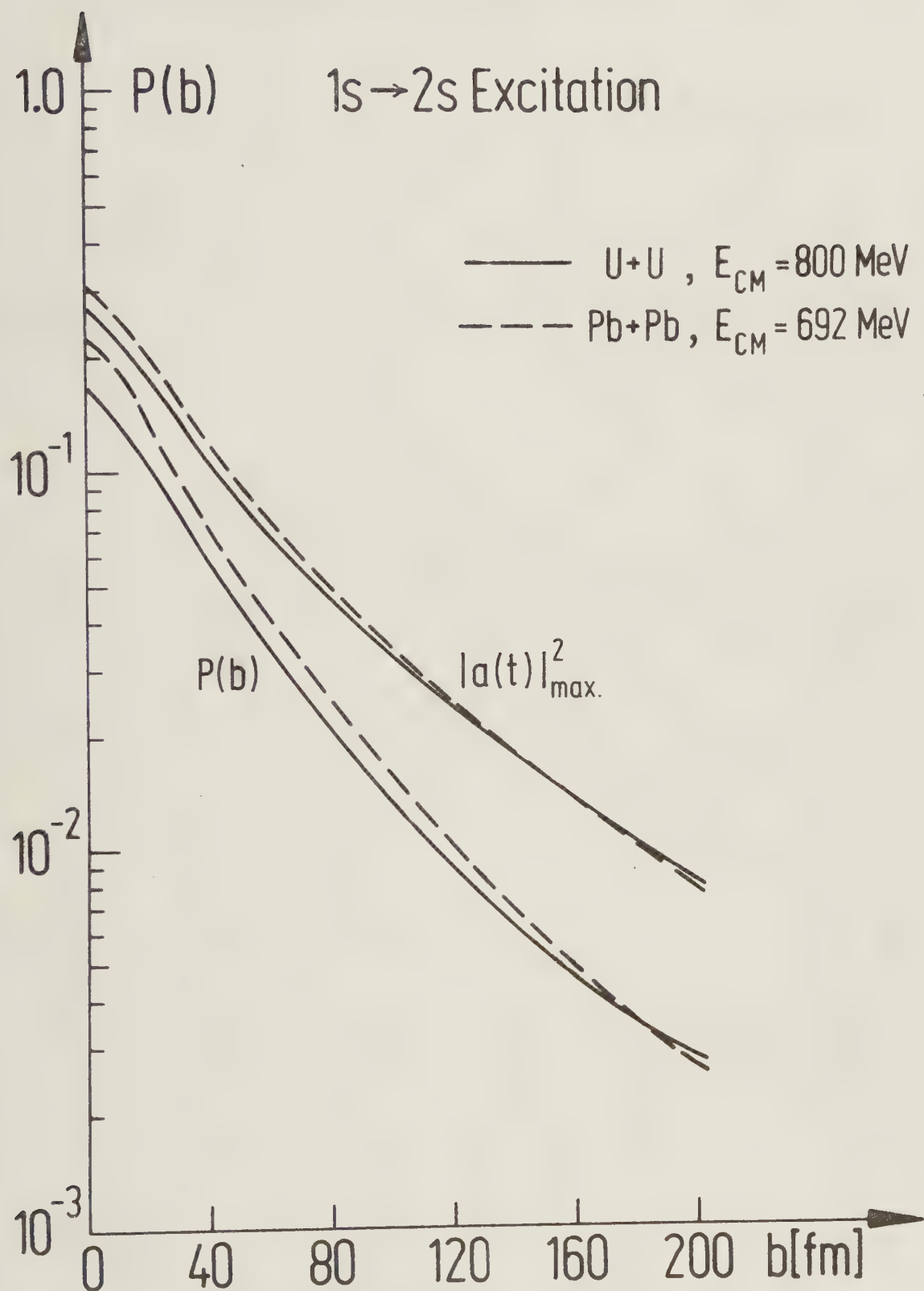
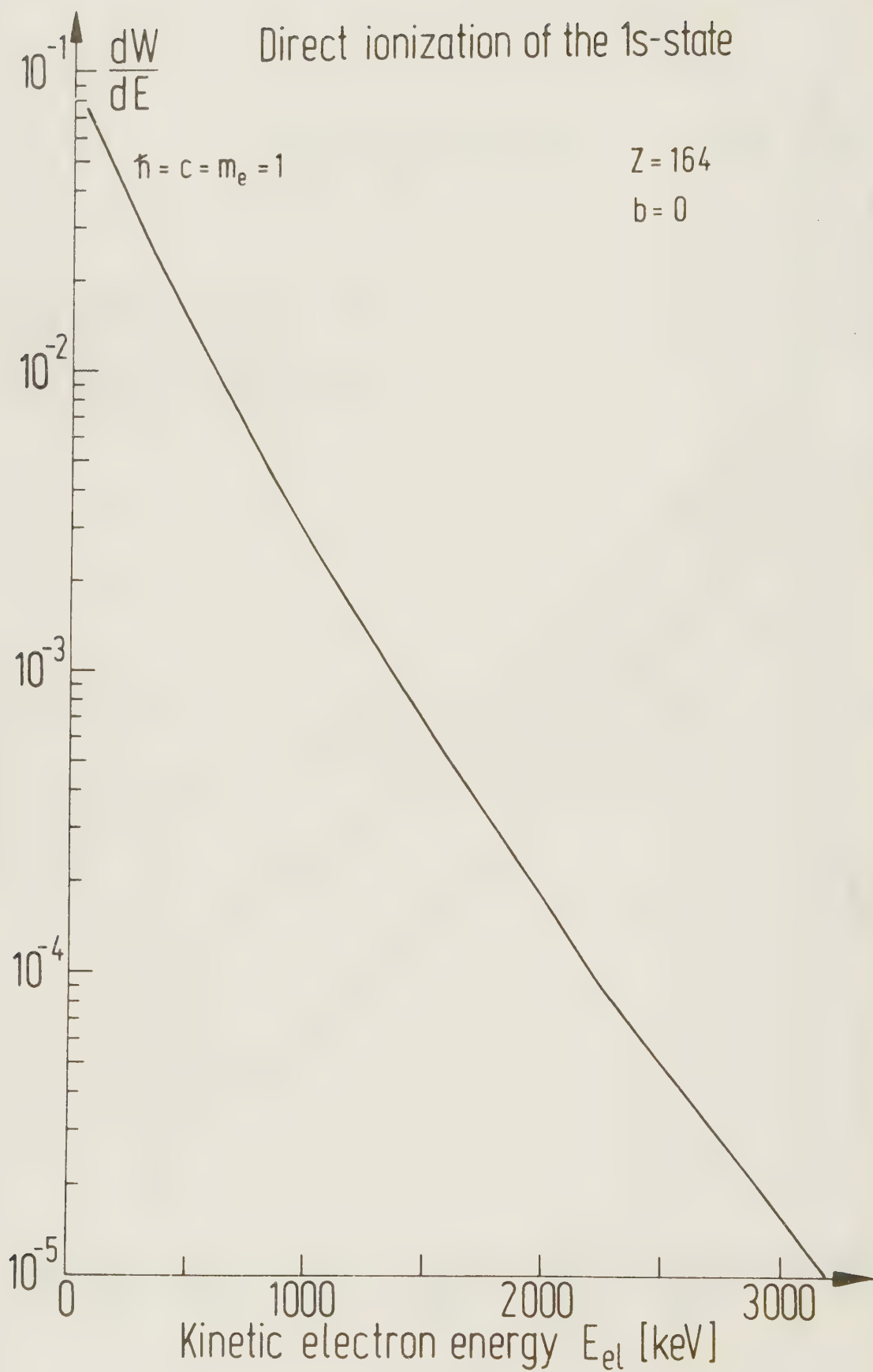


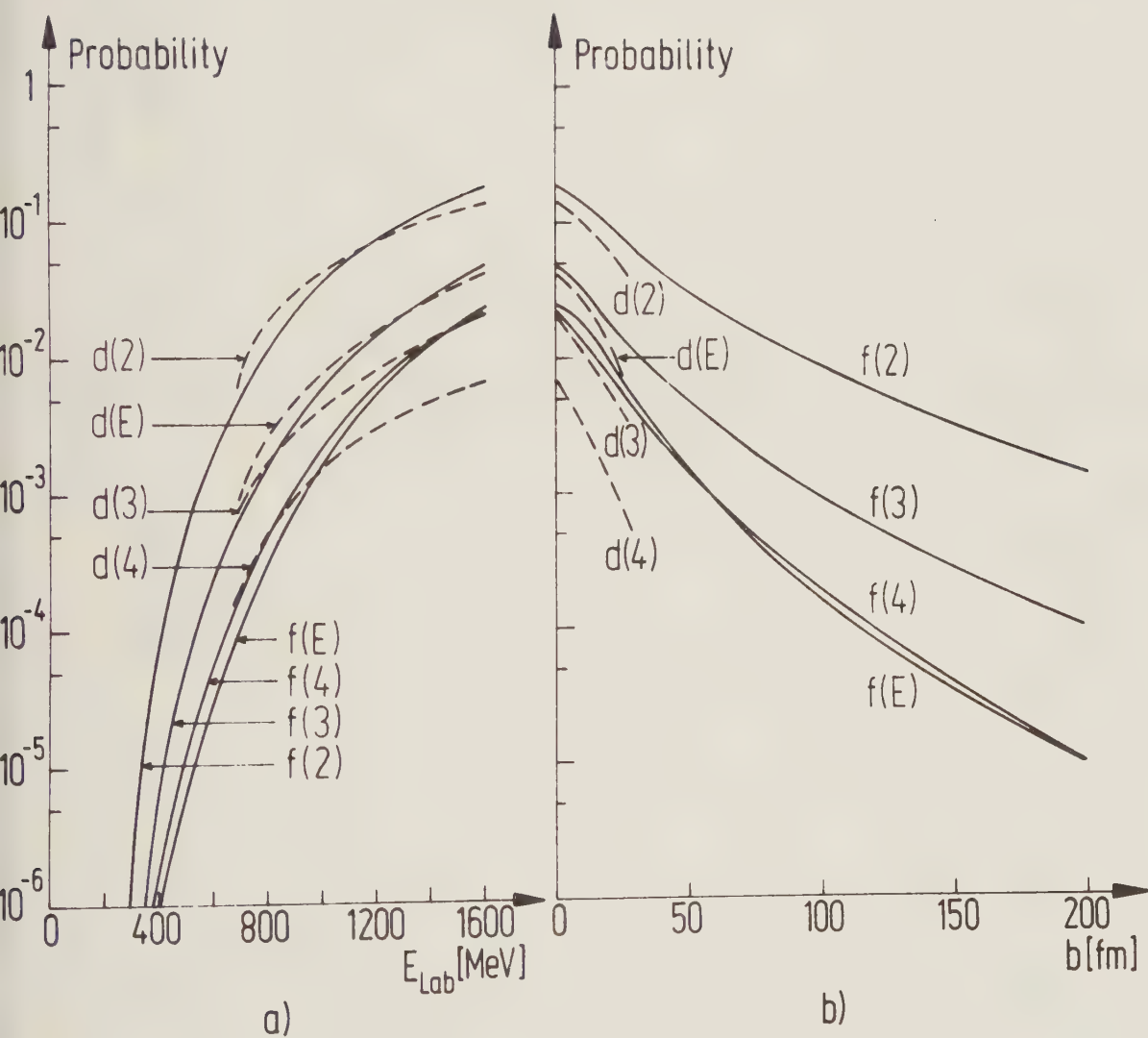
Figure 20



Figur 21



Figur 22



Figur 23

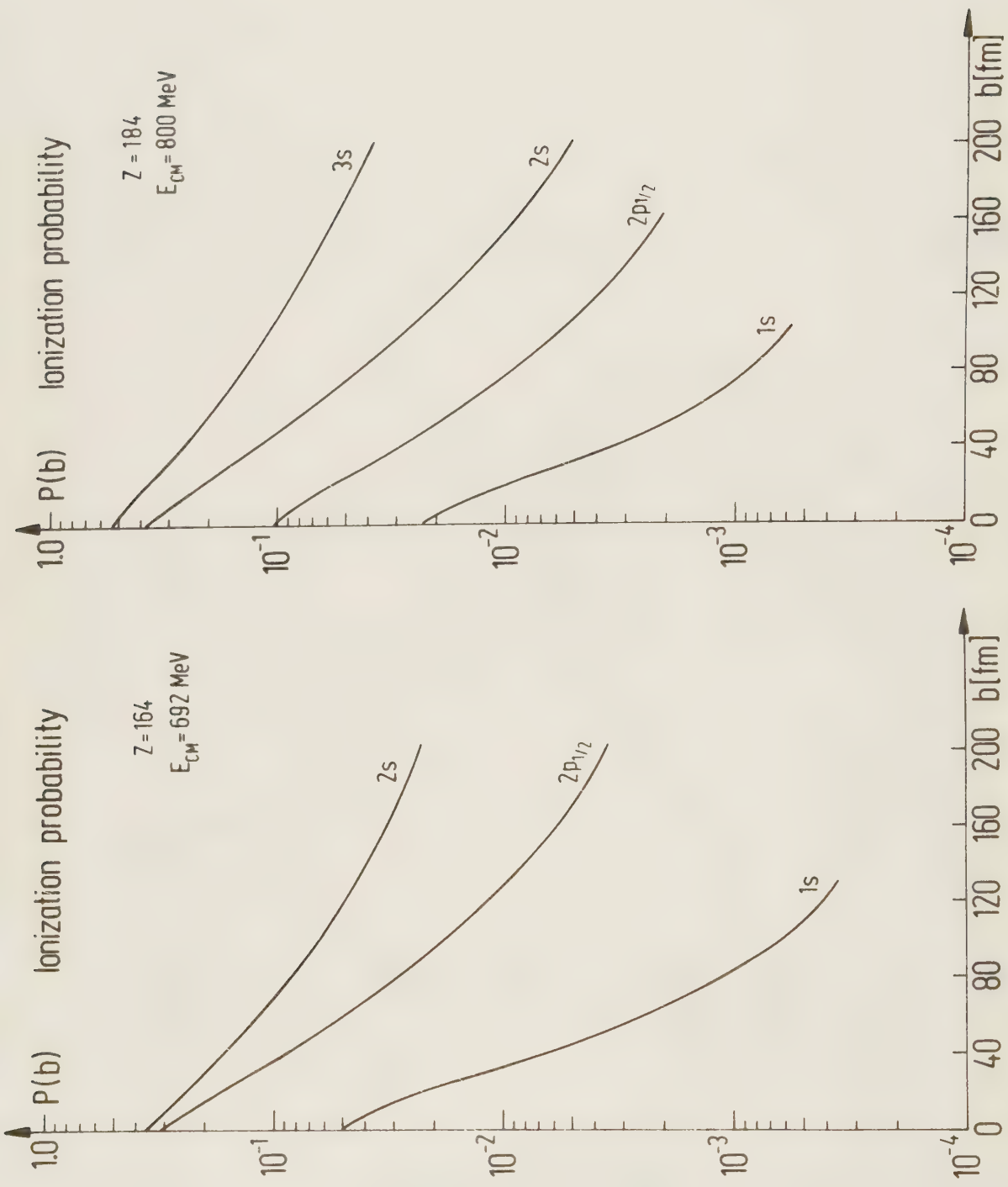


Figure 24

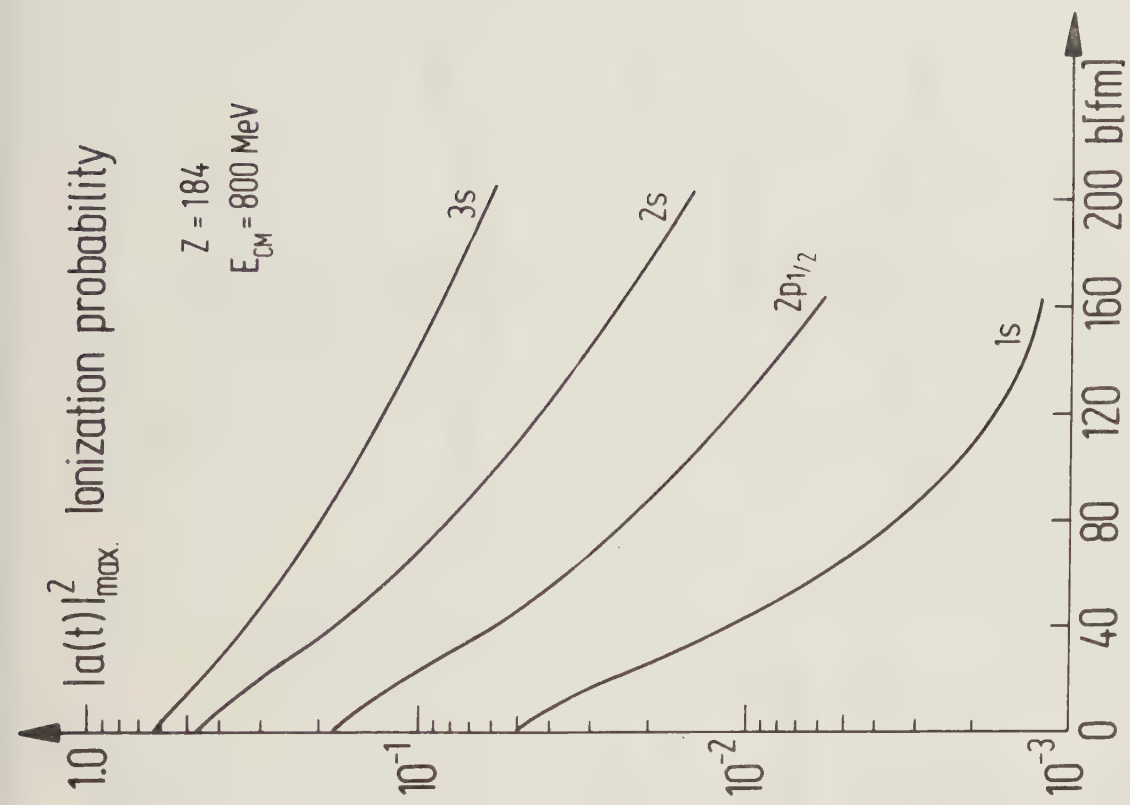
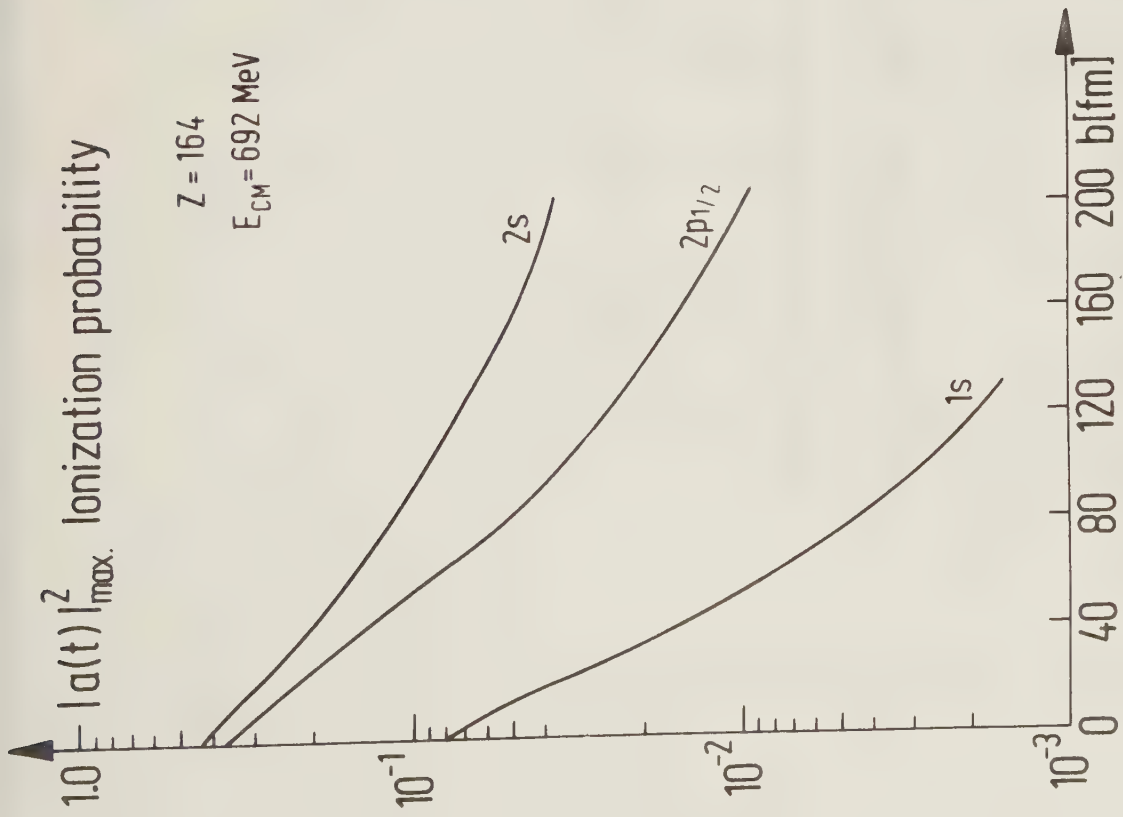
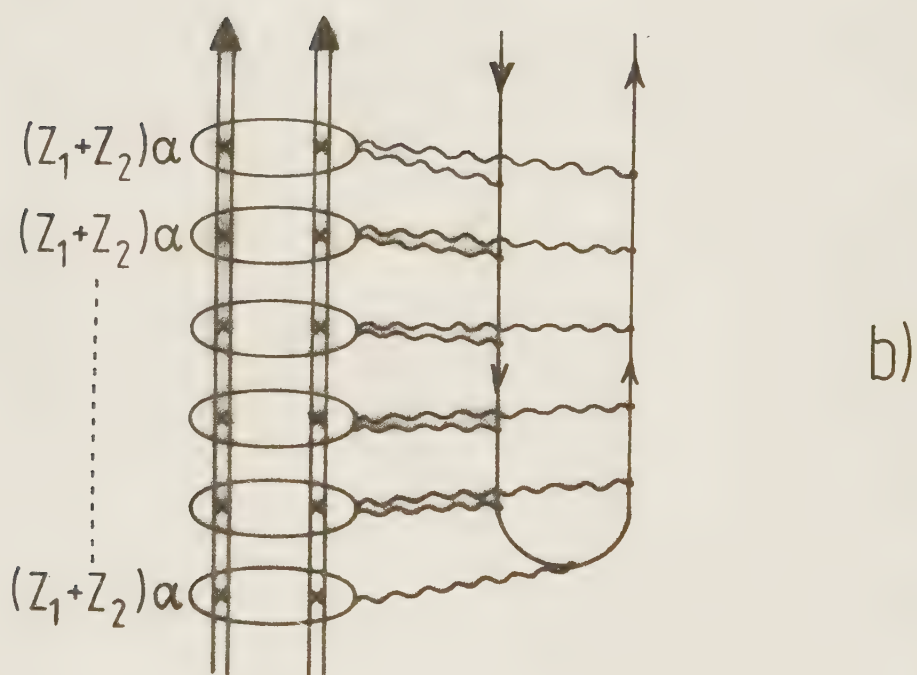
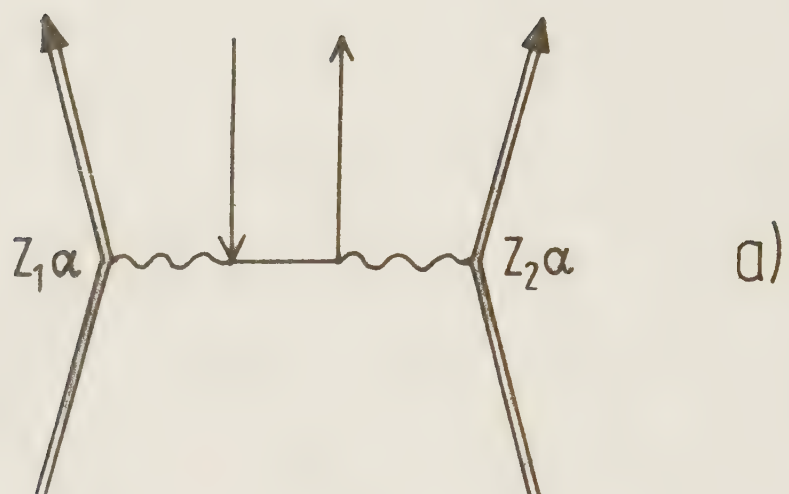
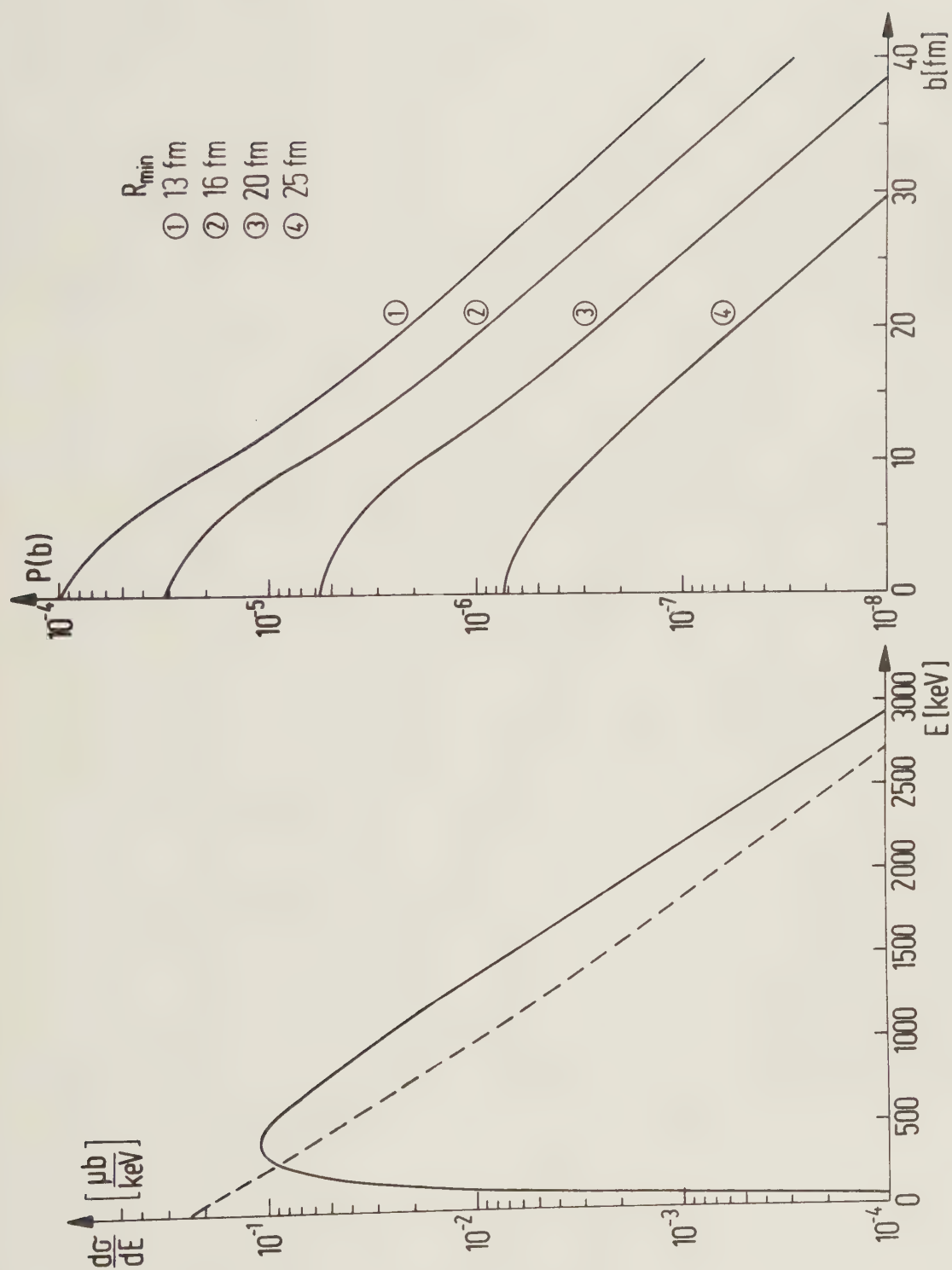


Figure 25



Figur 26



Figur 27

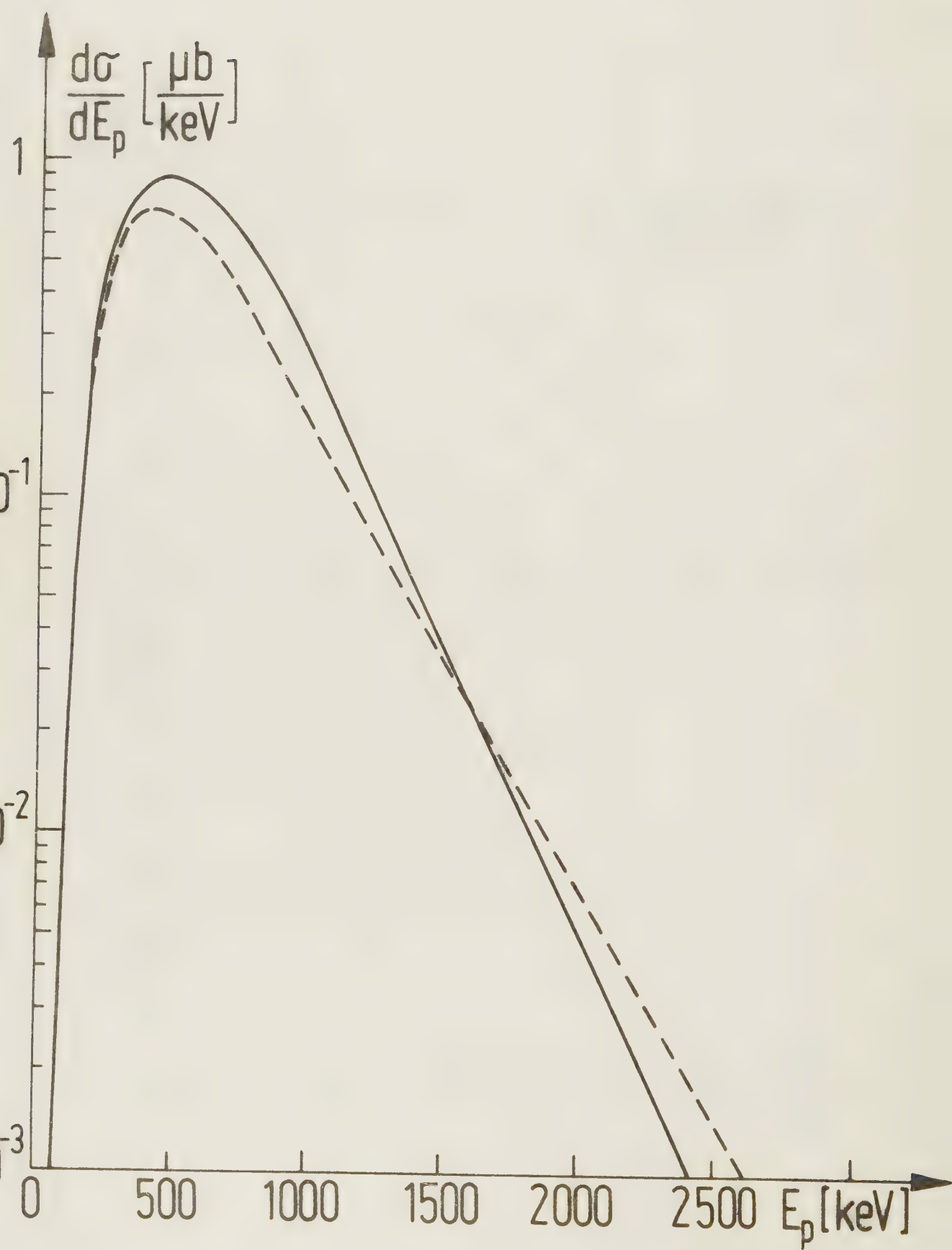
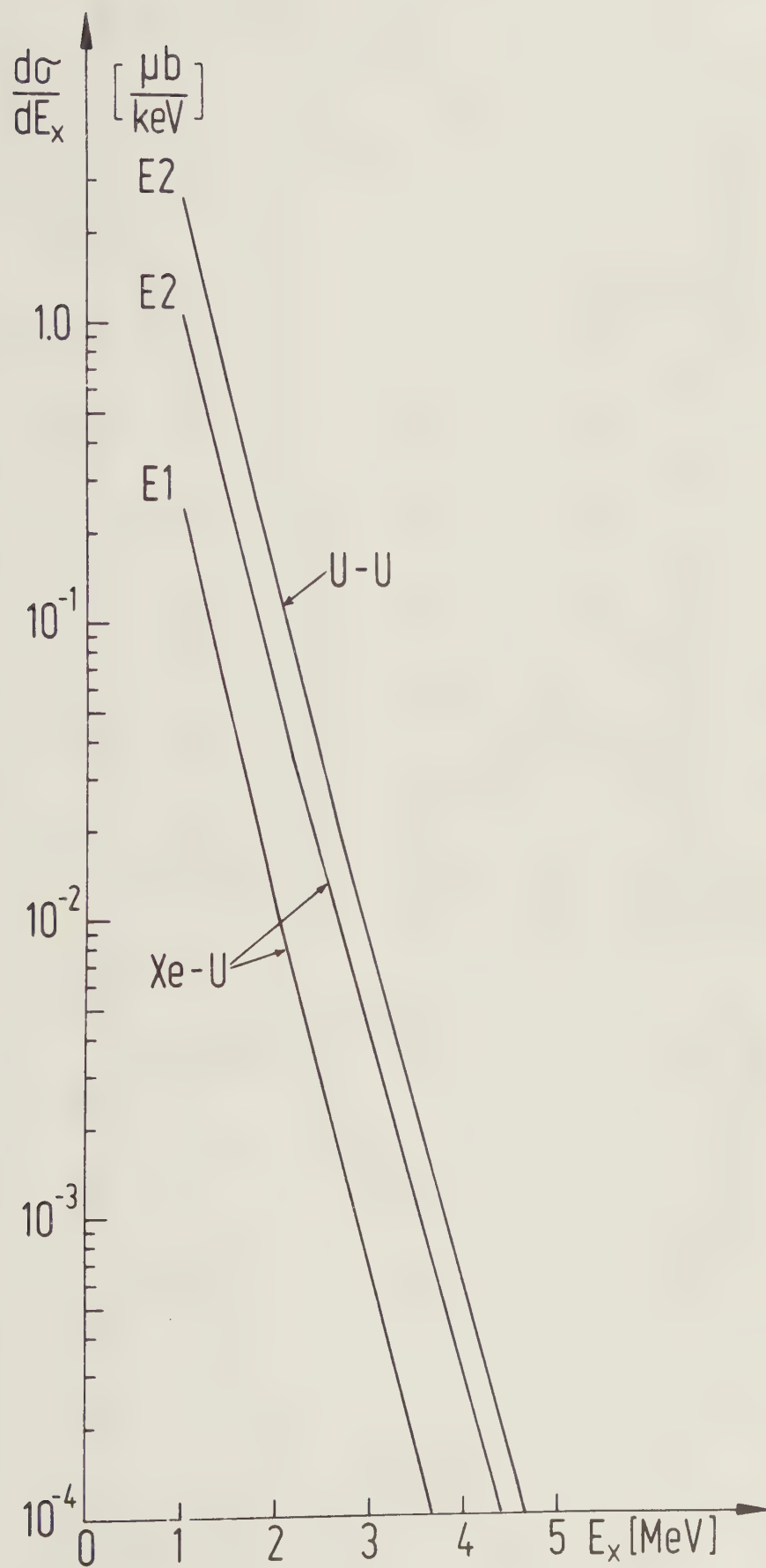


Figure 28



Figur 29

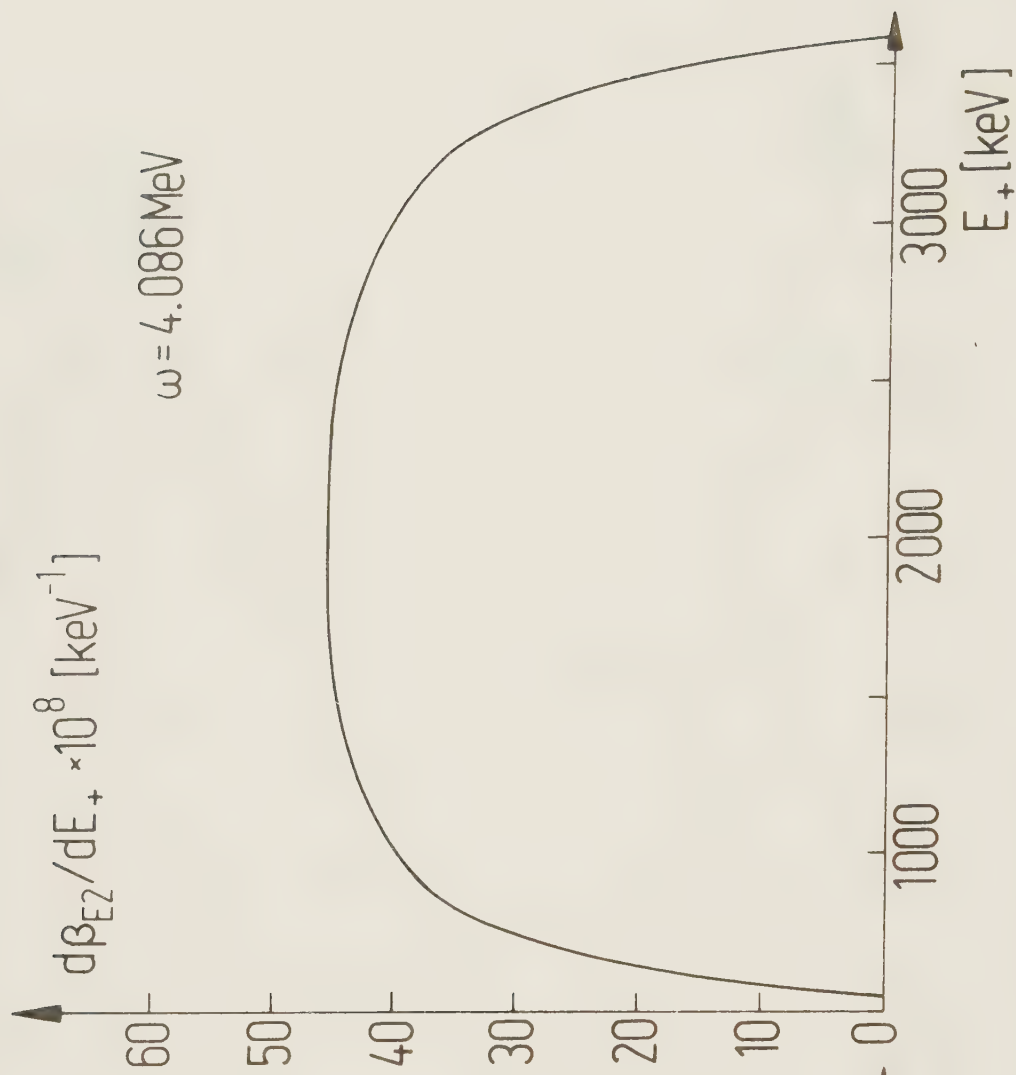
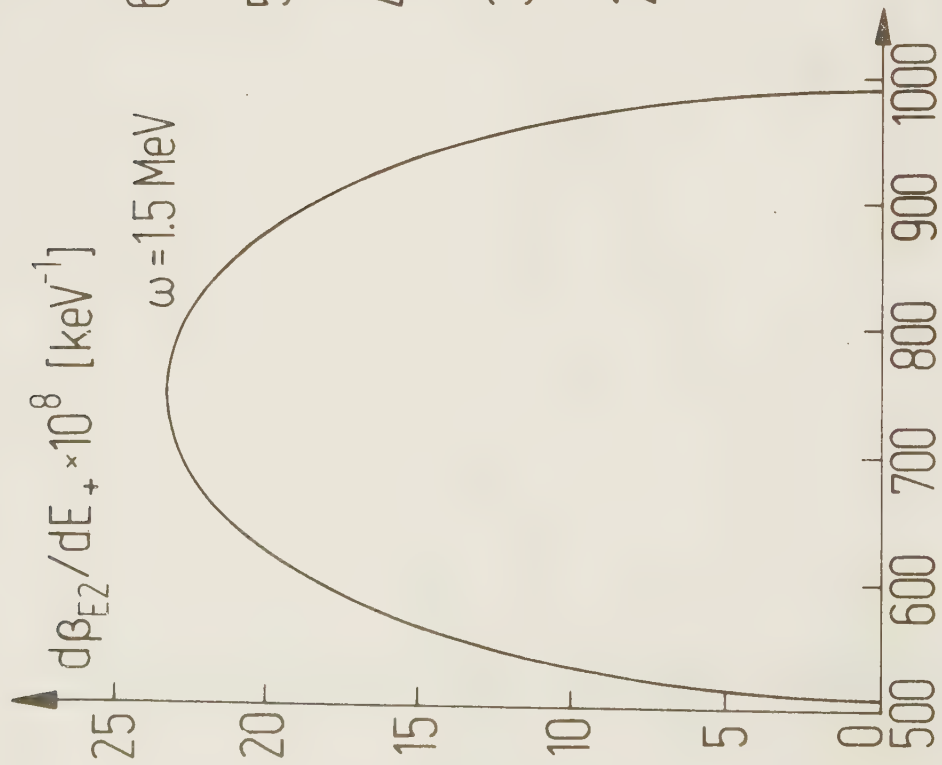
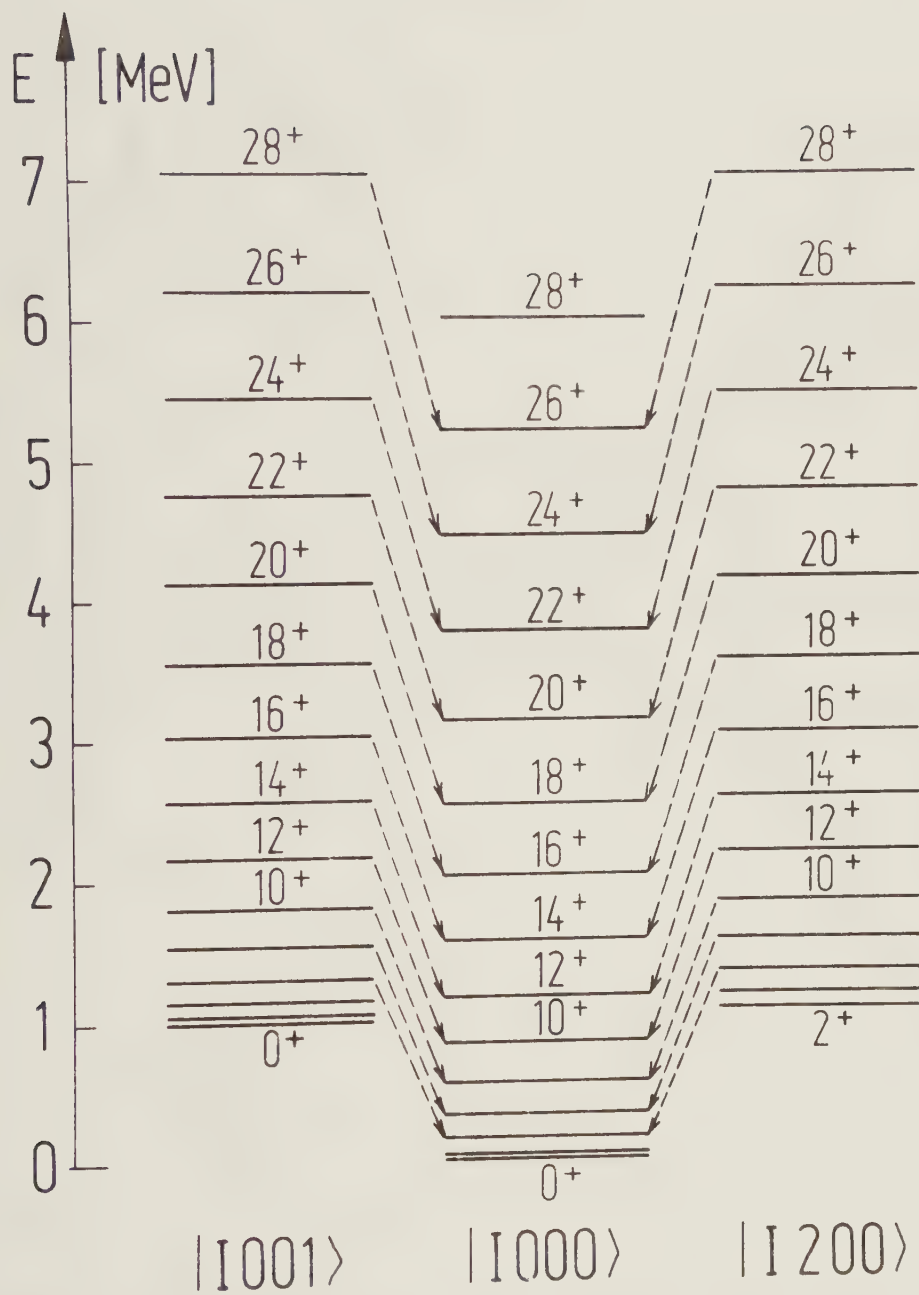
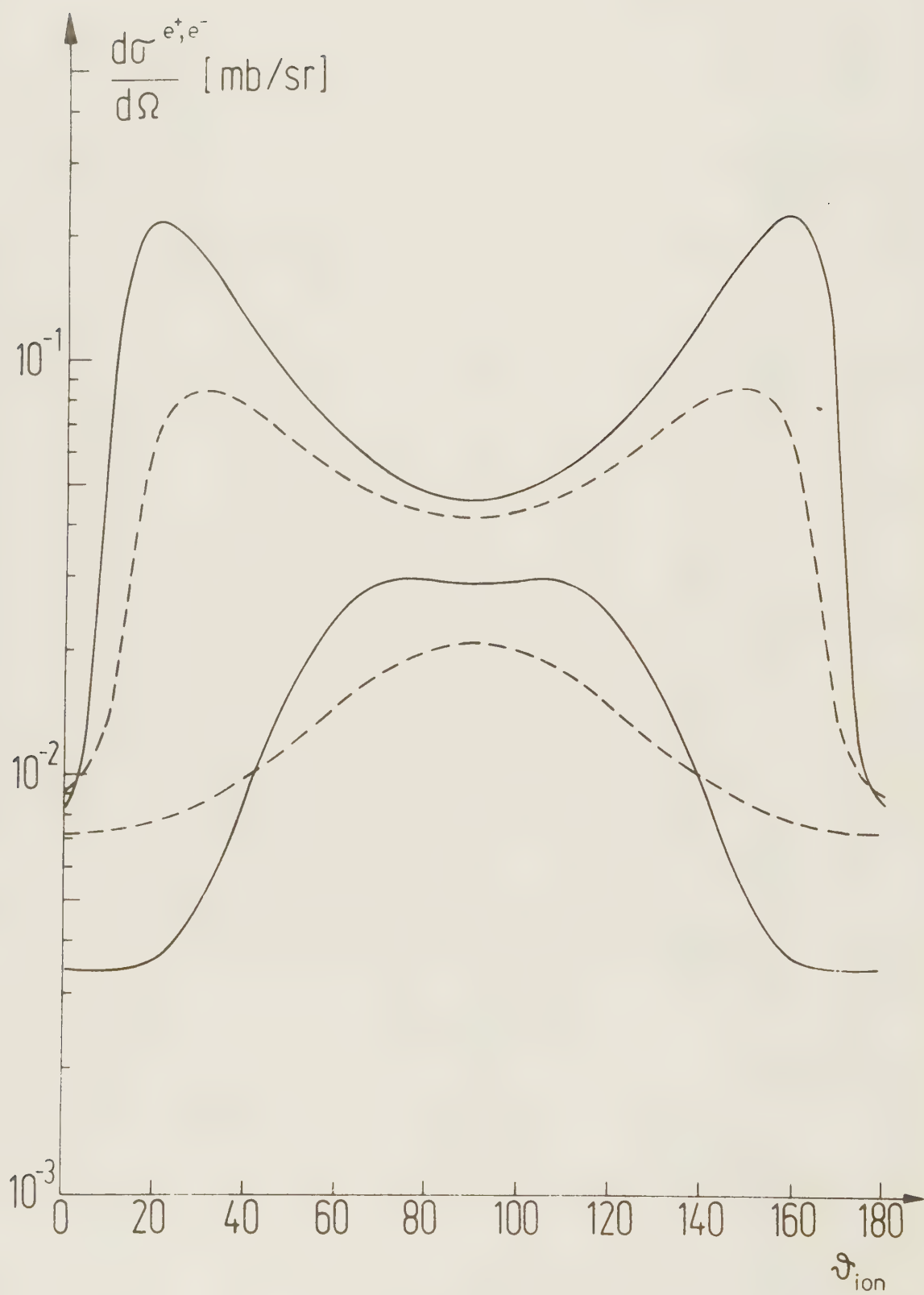


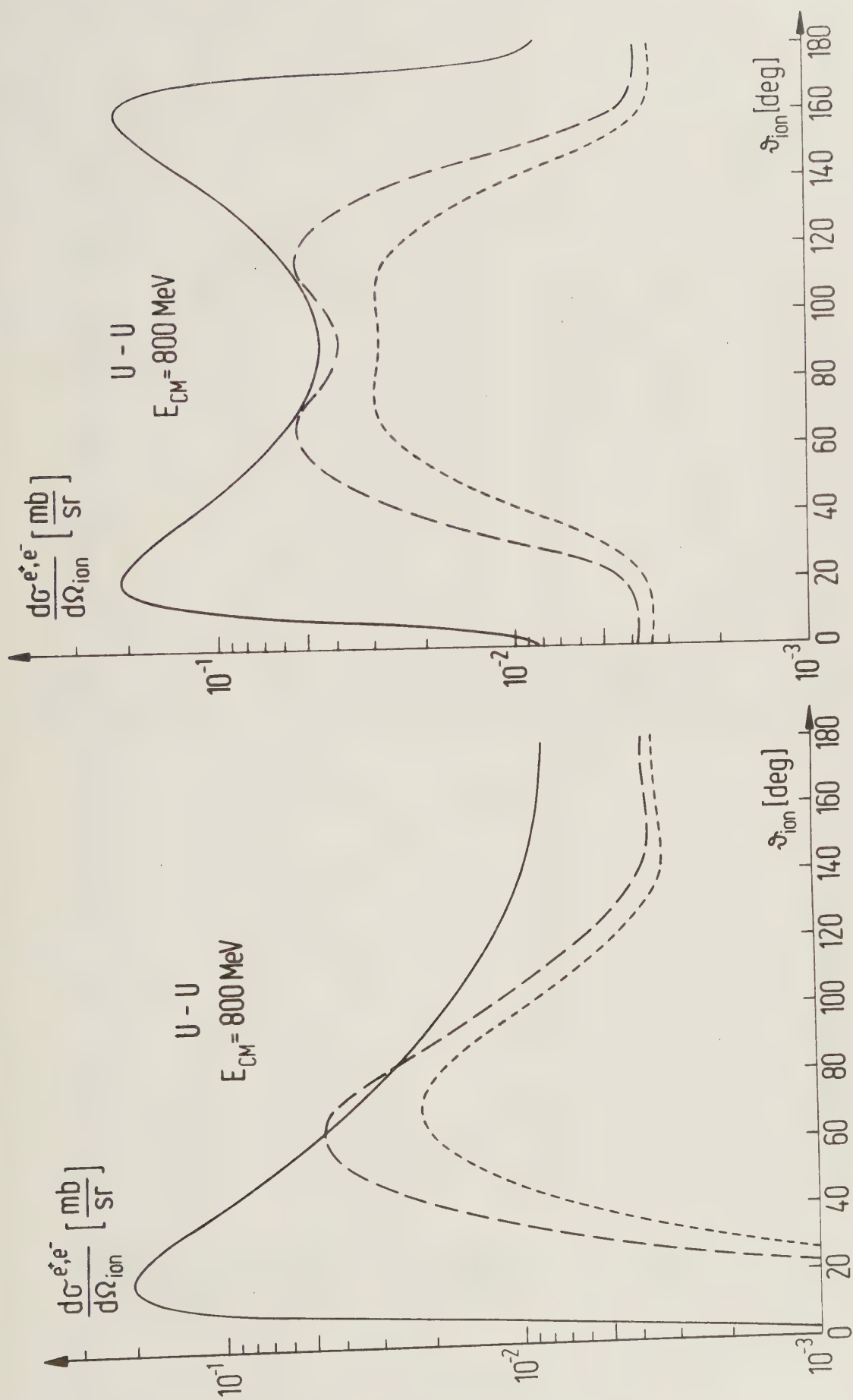
Figure 30



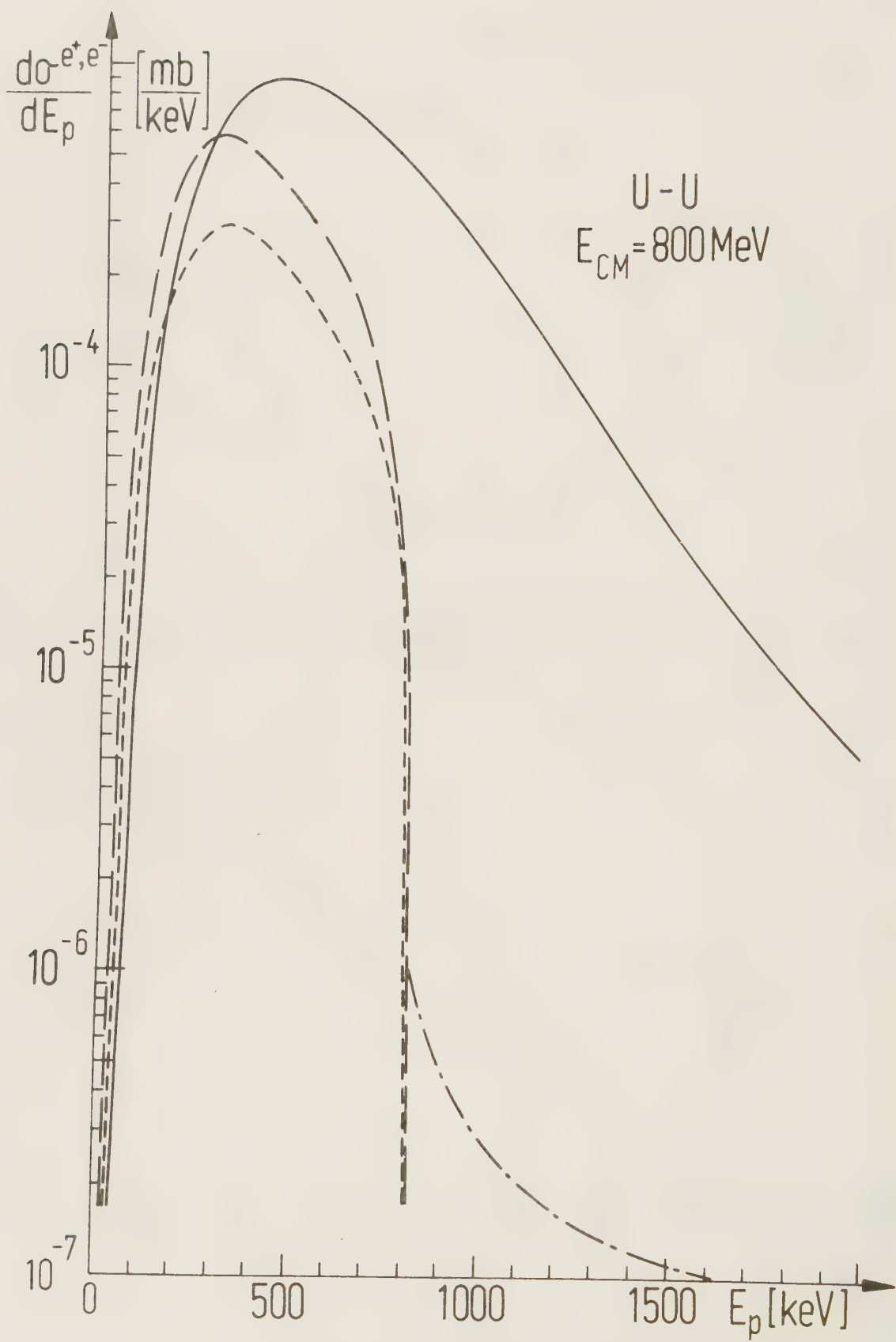
Figur 31



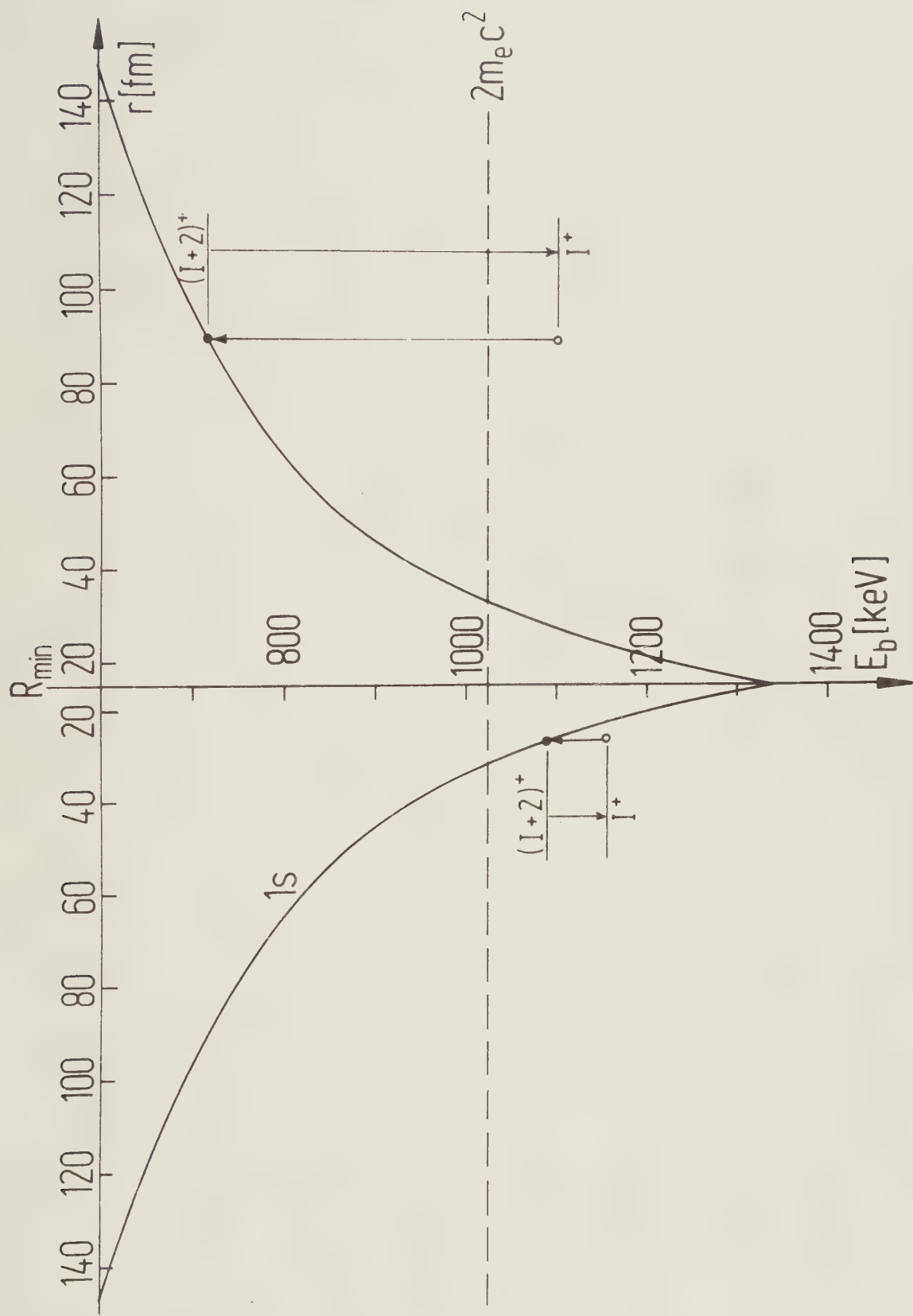
Figur 32



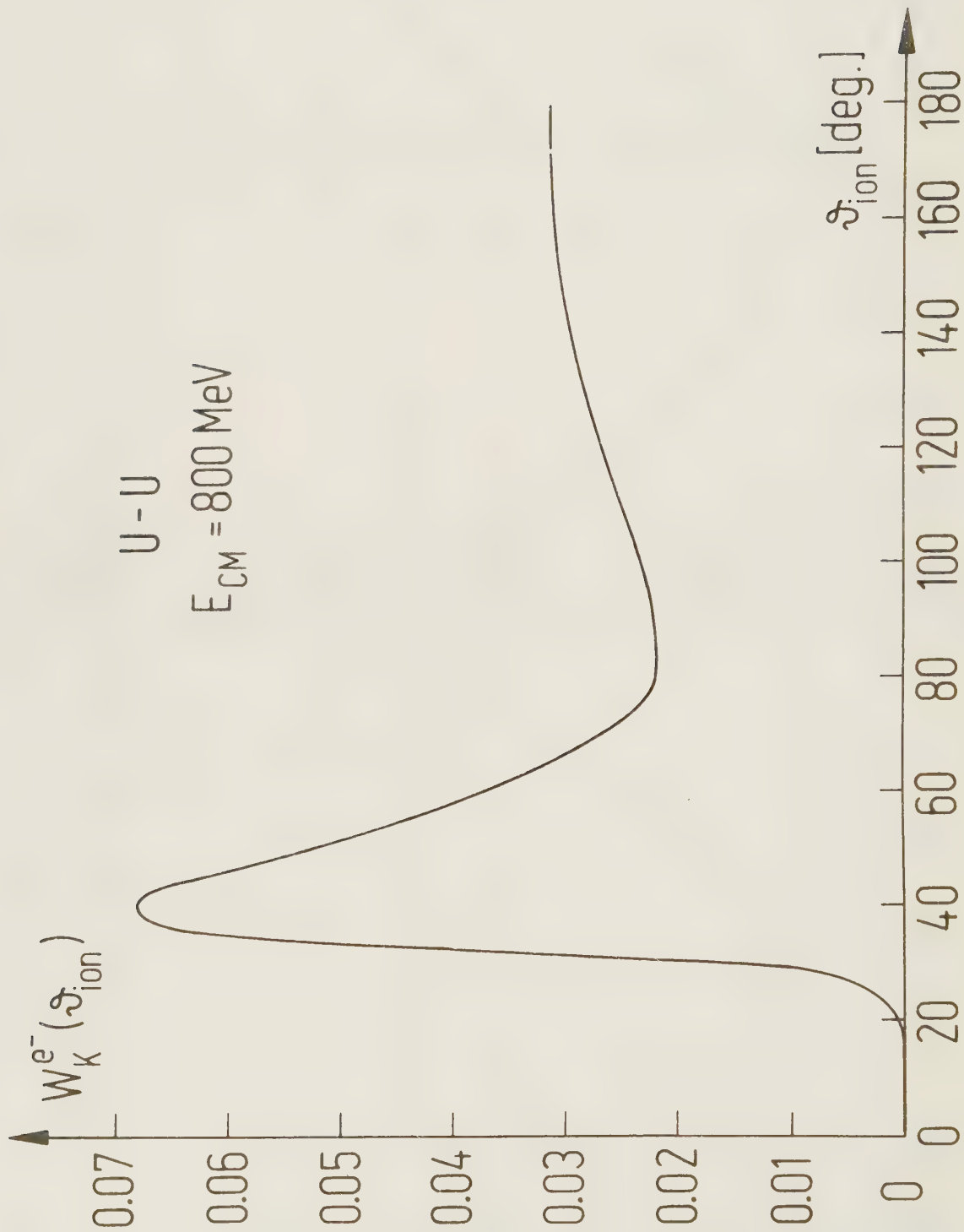
Figur 33



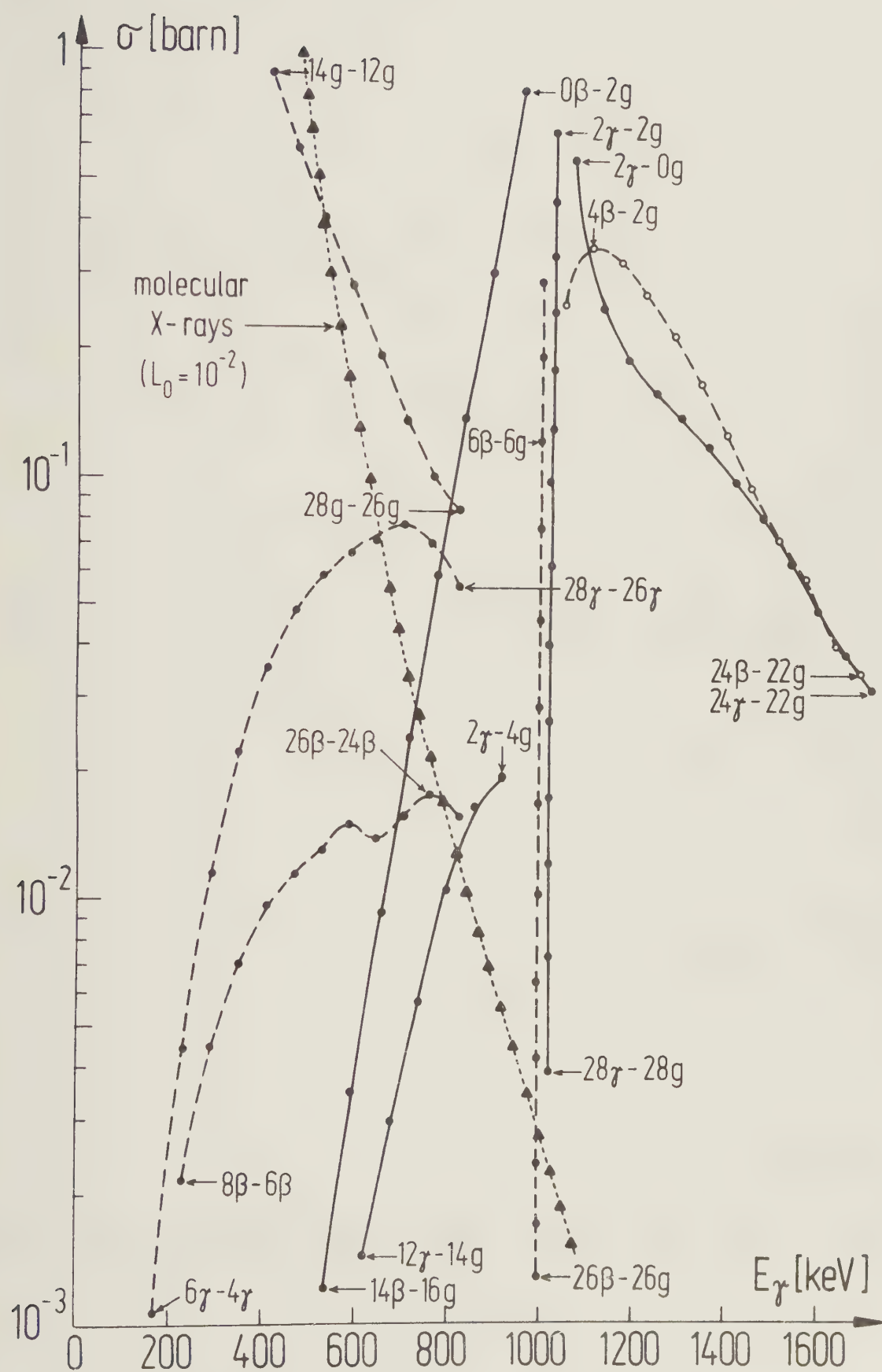
Figur 34



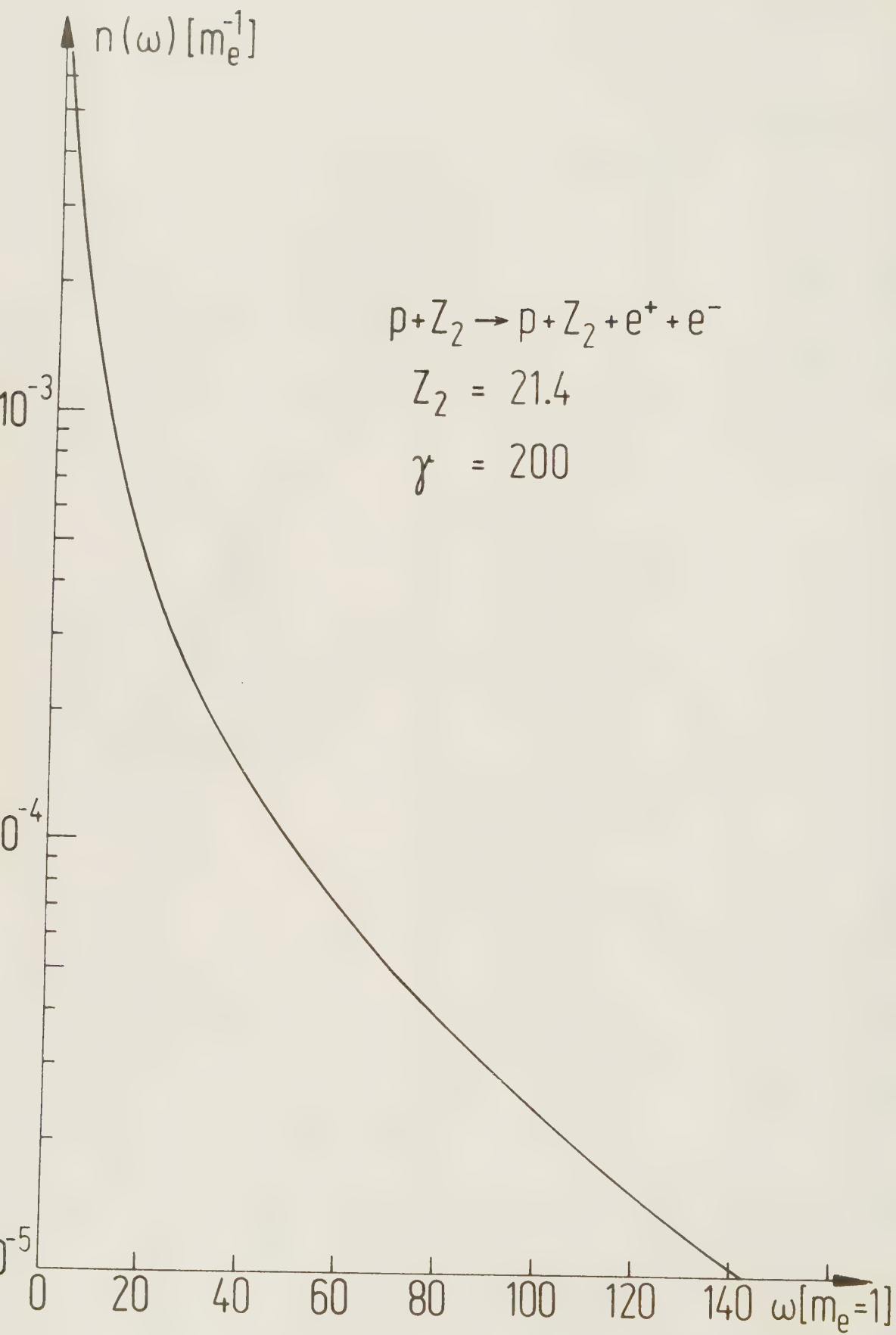
Figur 35



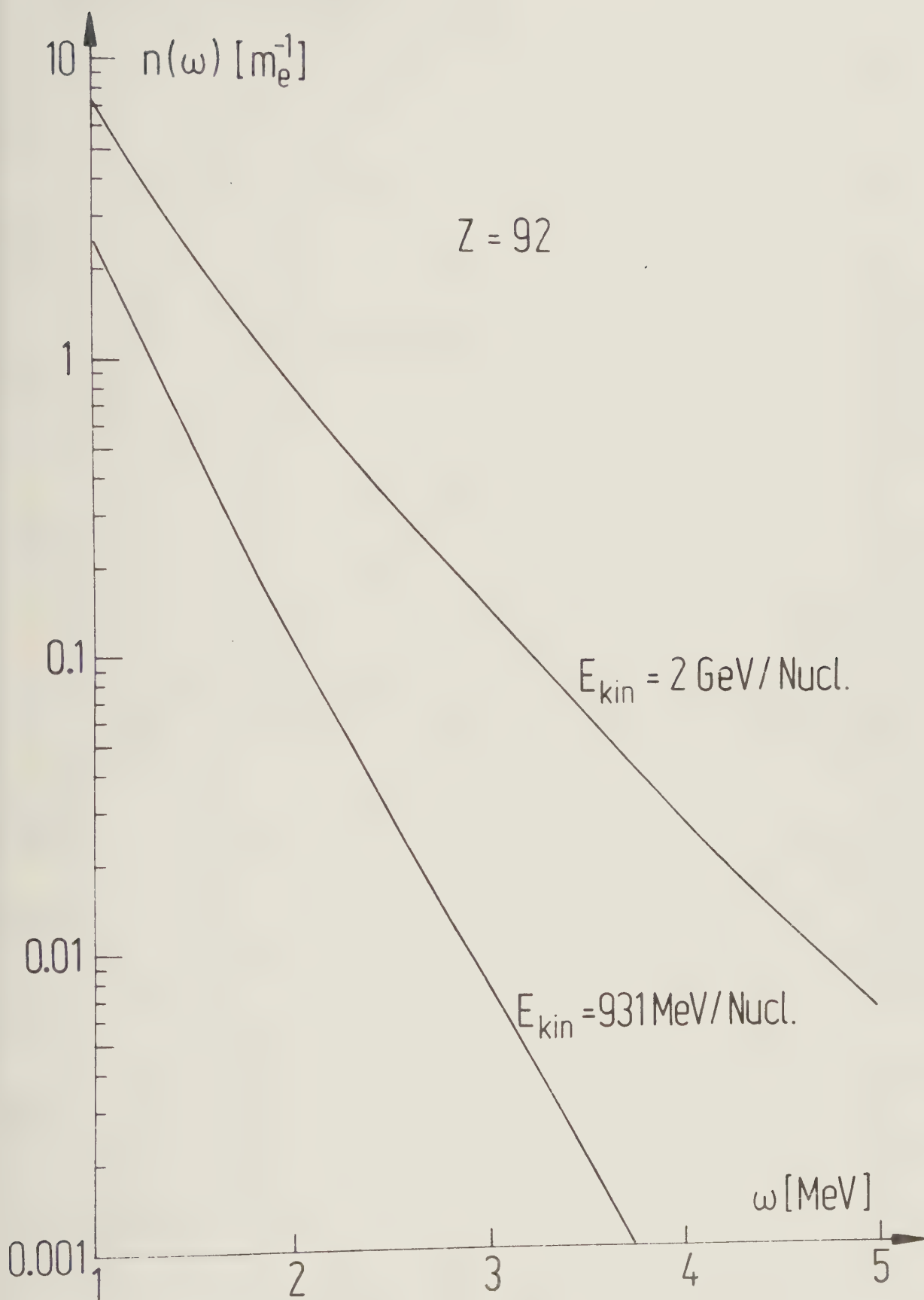
Figur 36



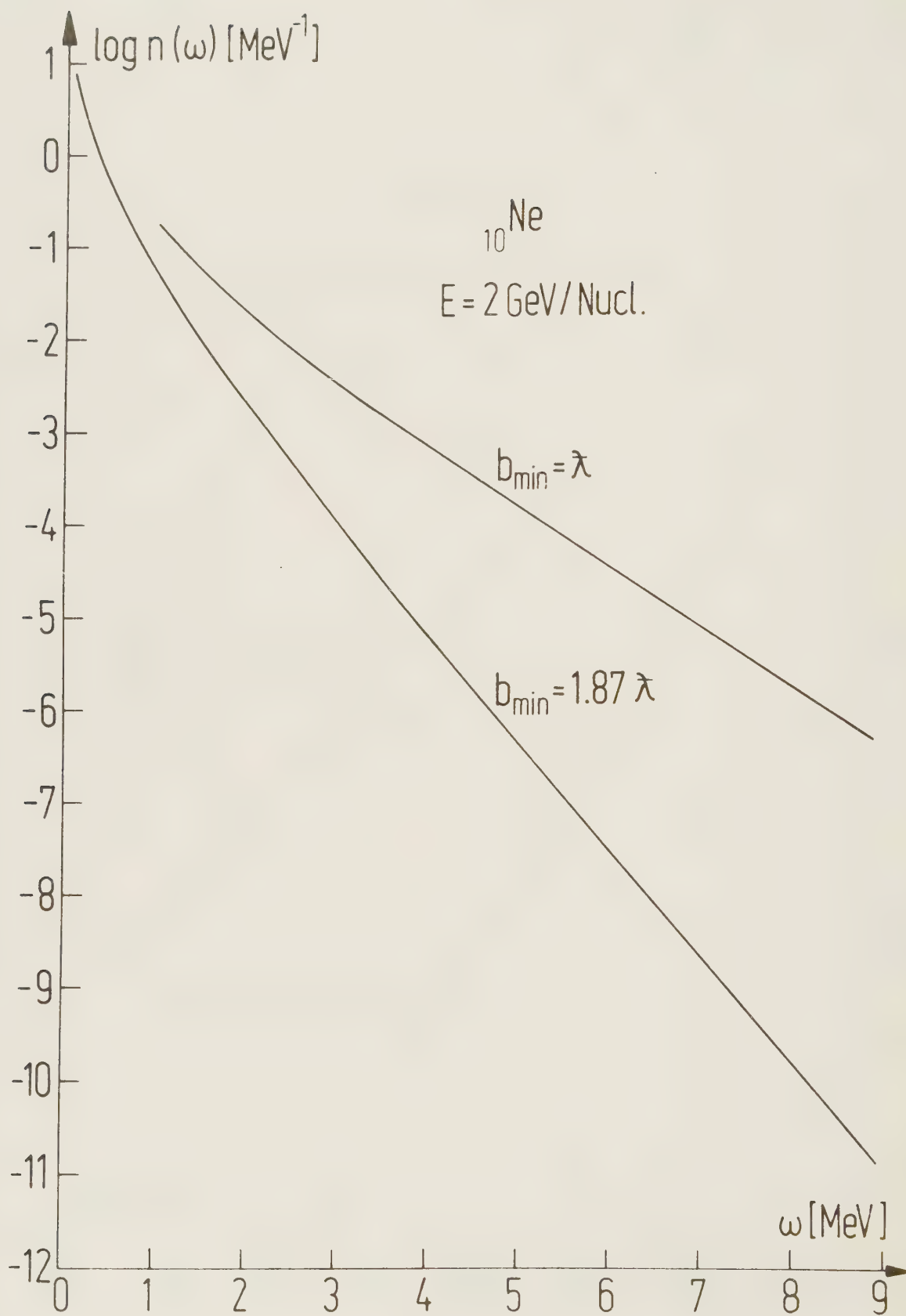
Figur 37



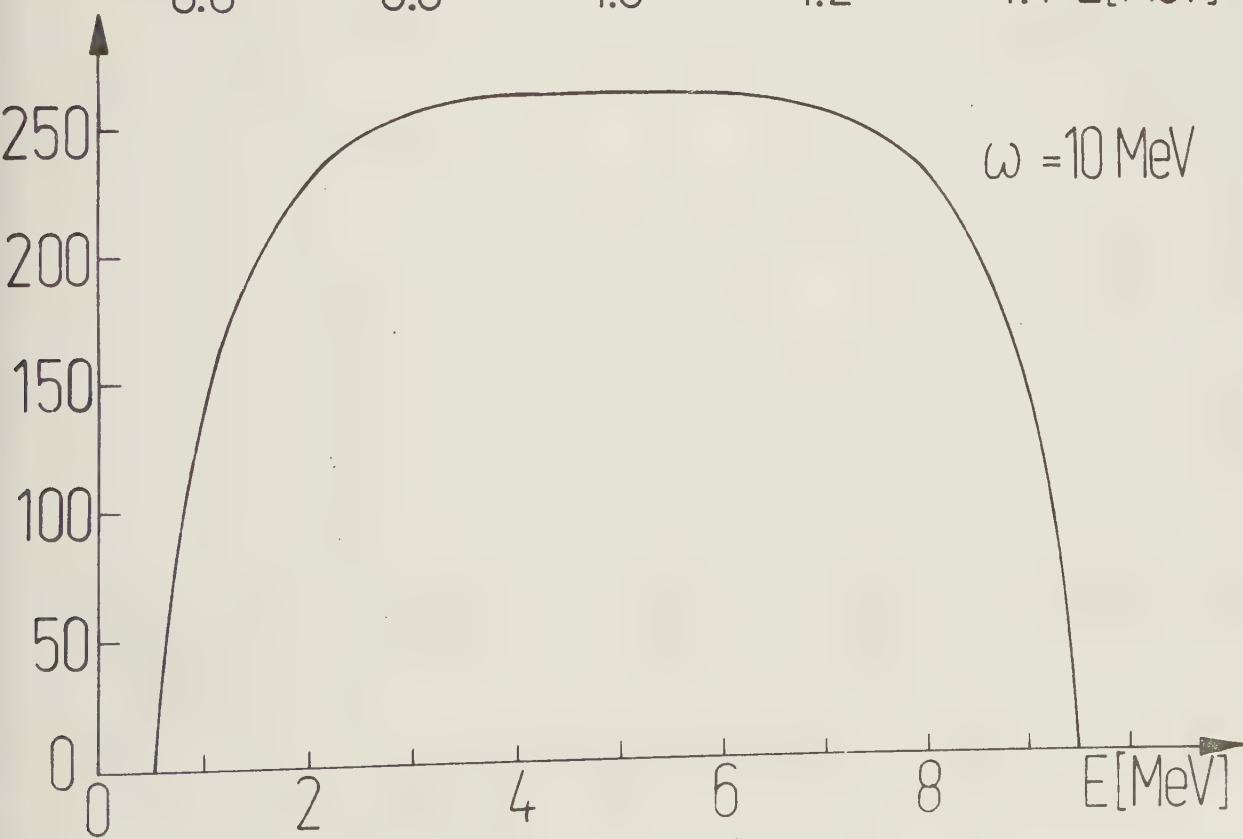
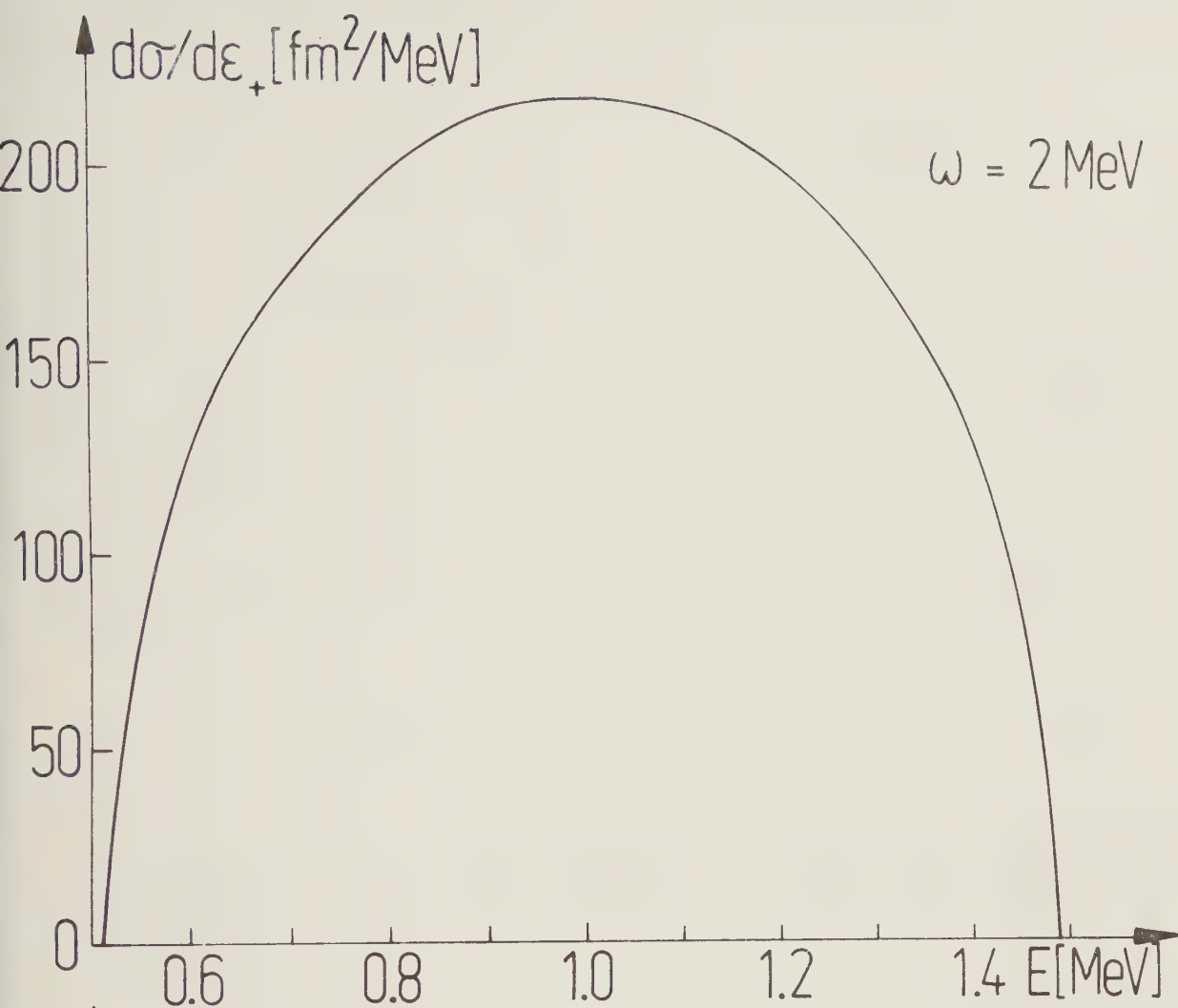
Figur 38



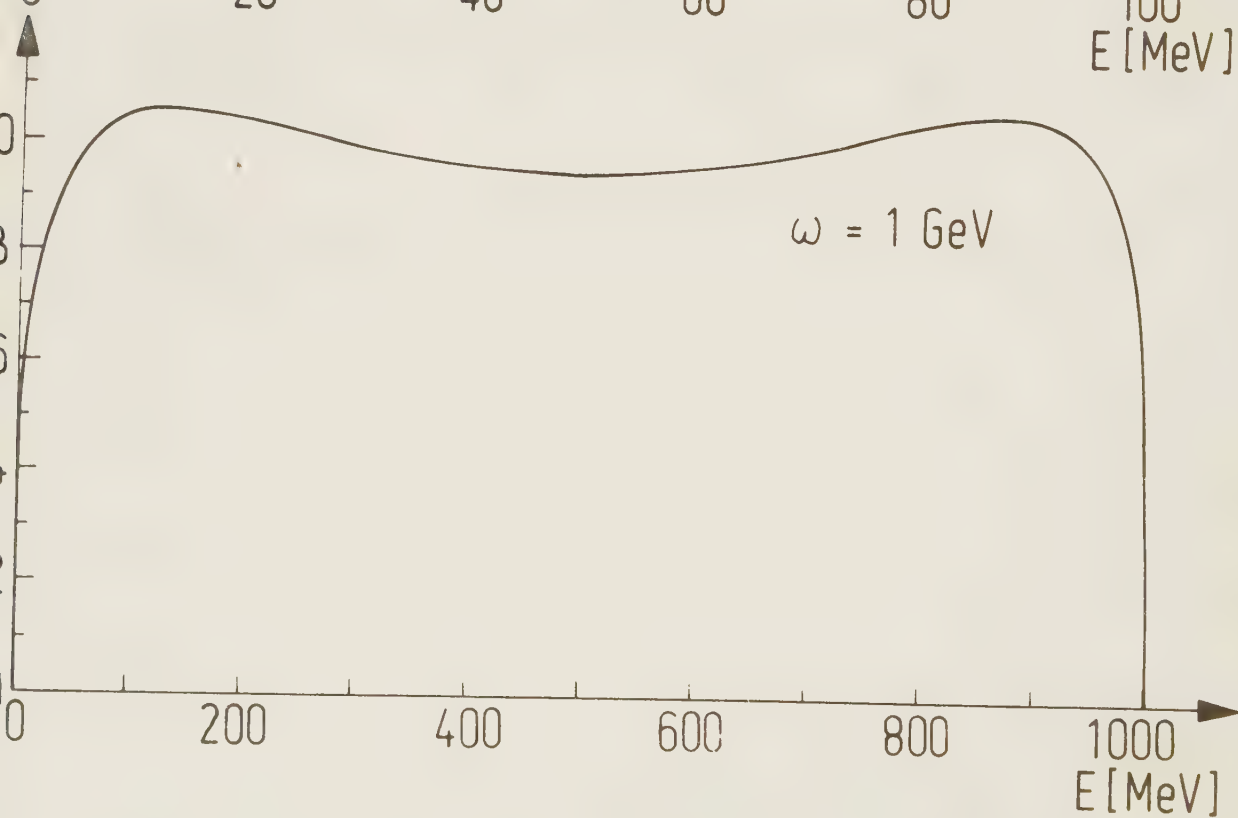
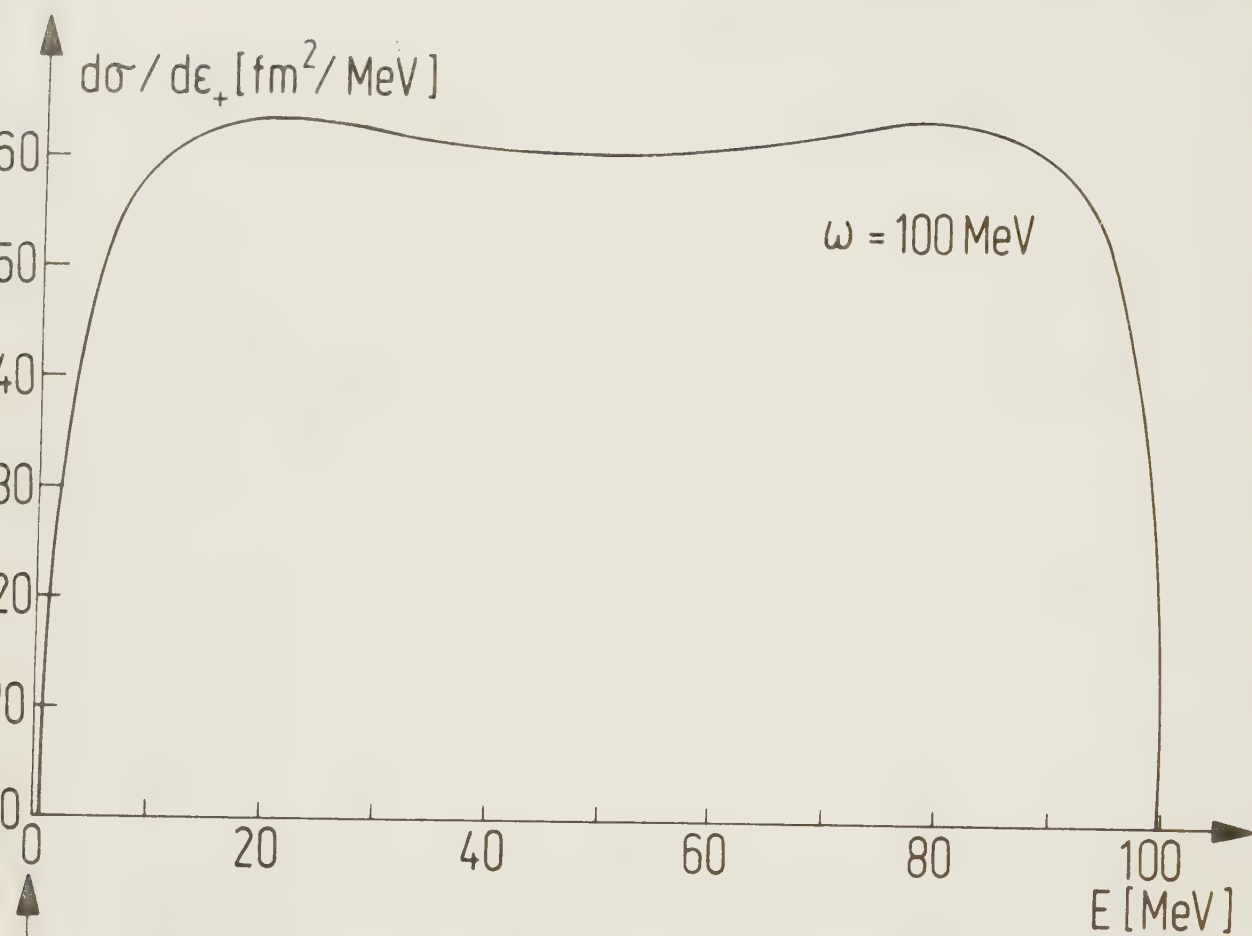
Figur 39



Figur 40



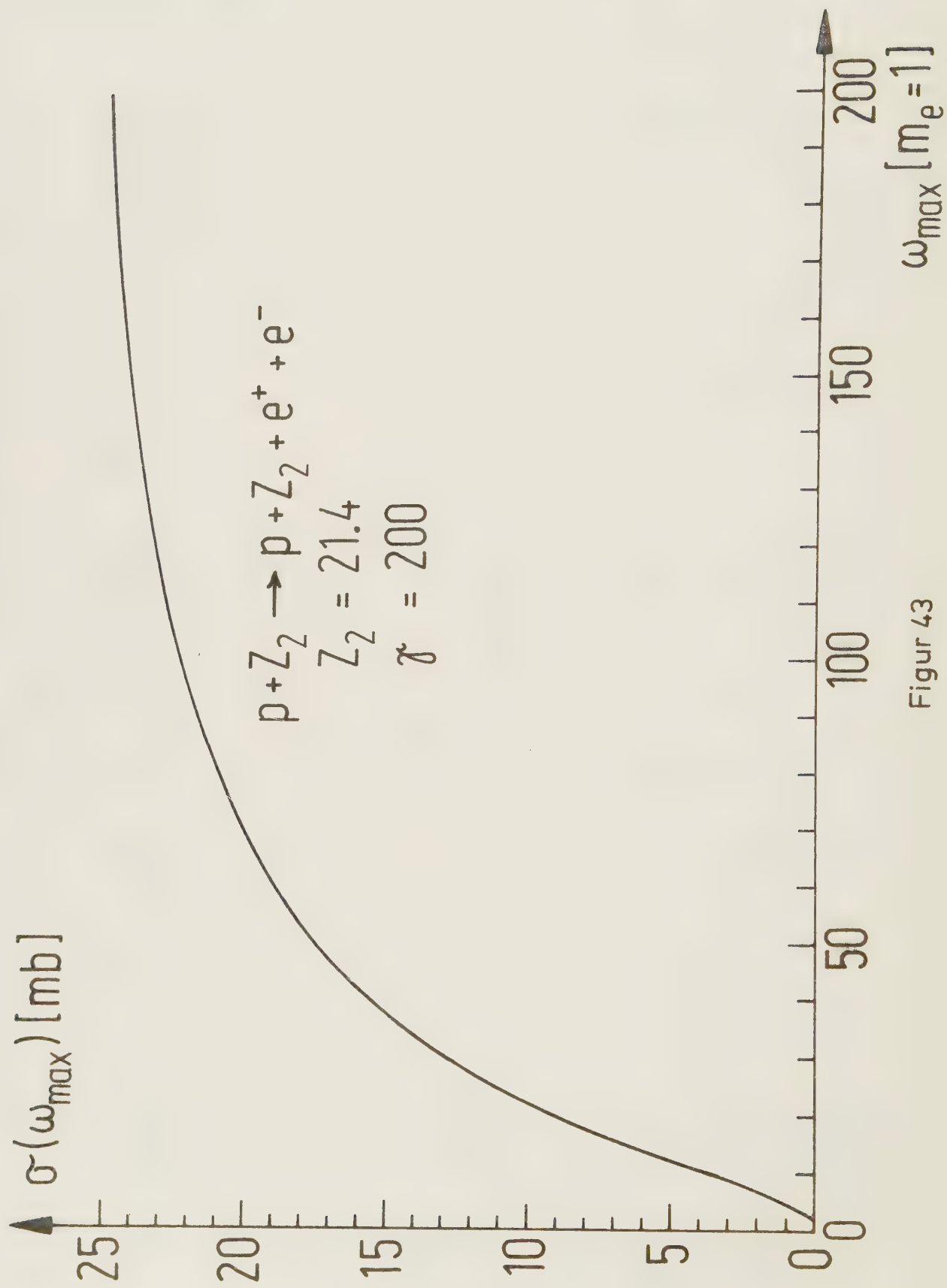
Figur 41 a,b



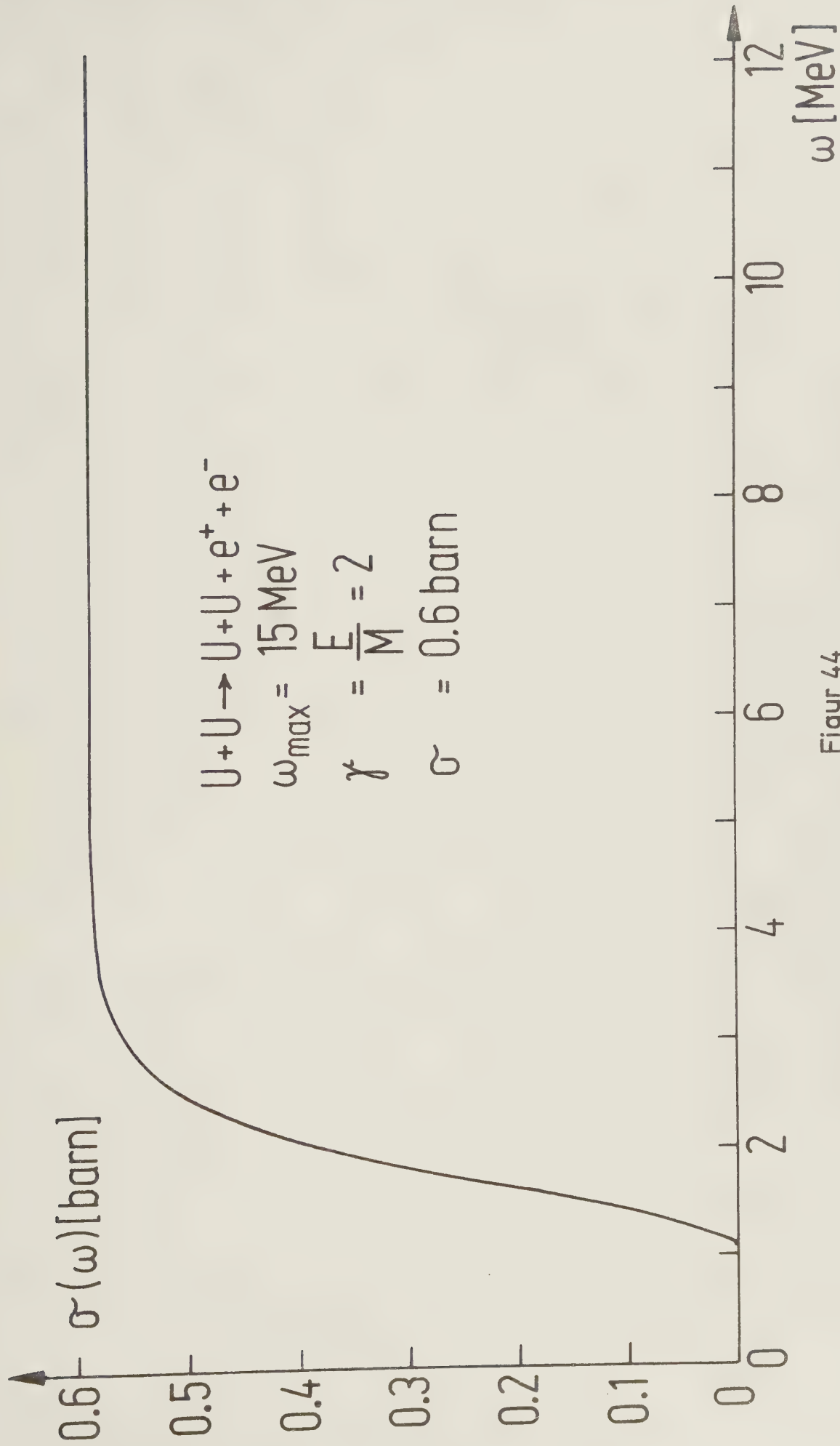
Figur 41 c,d



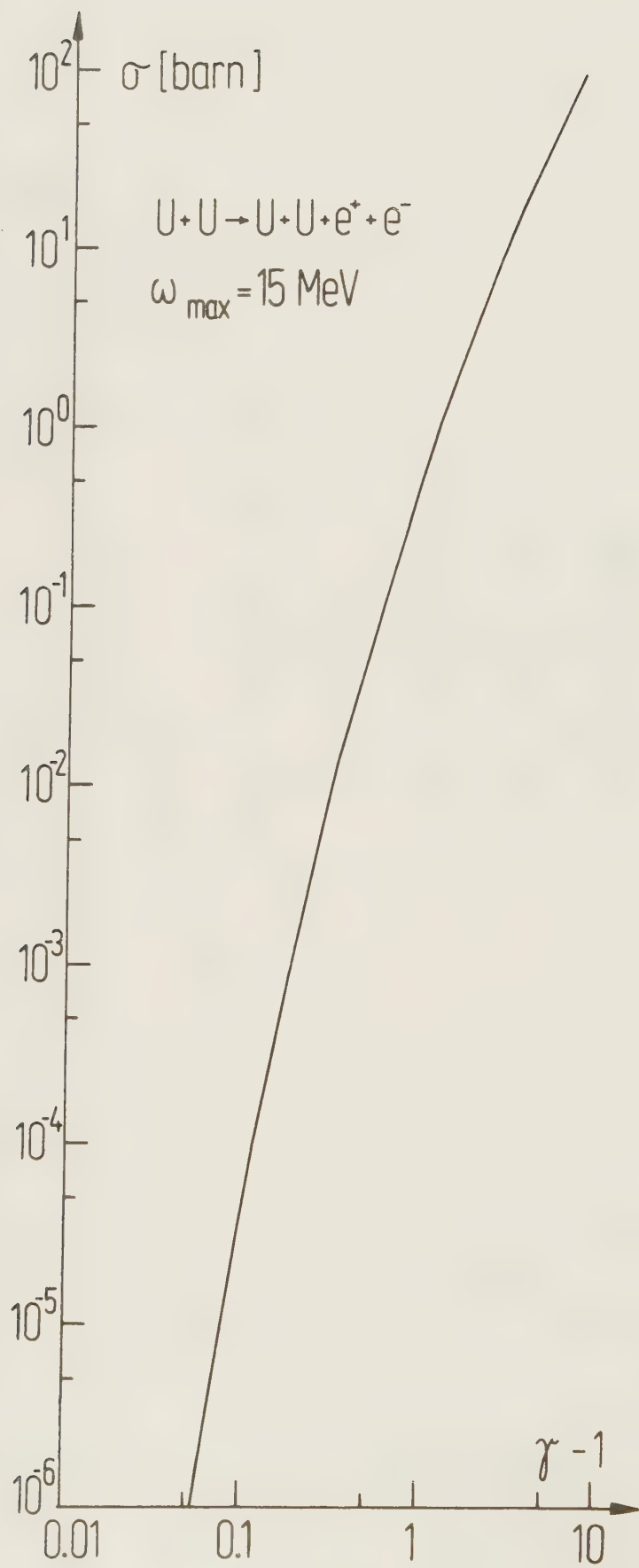
Figur 42



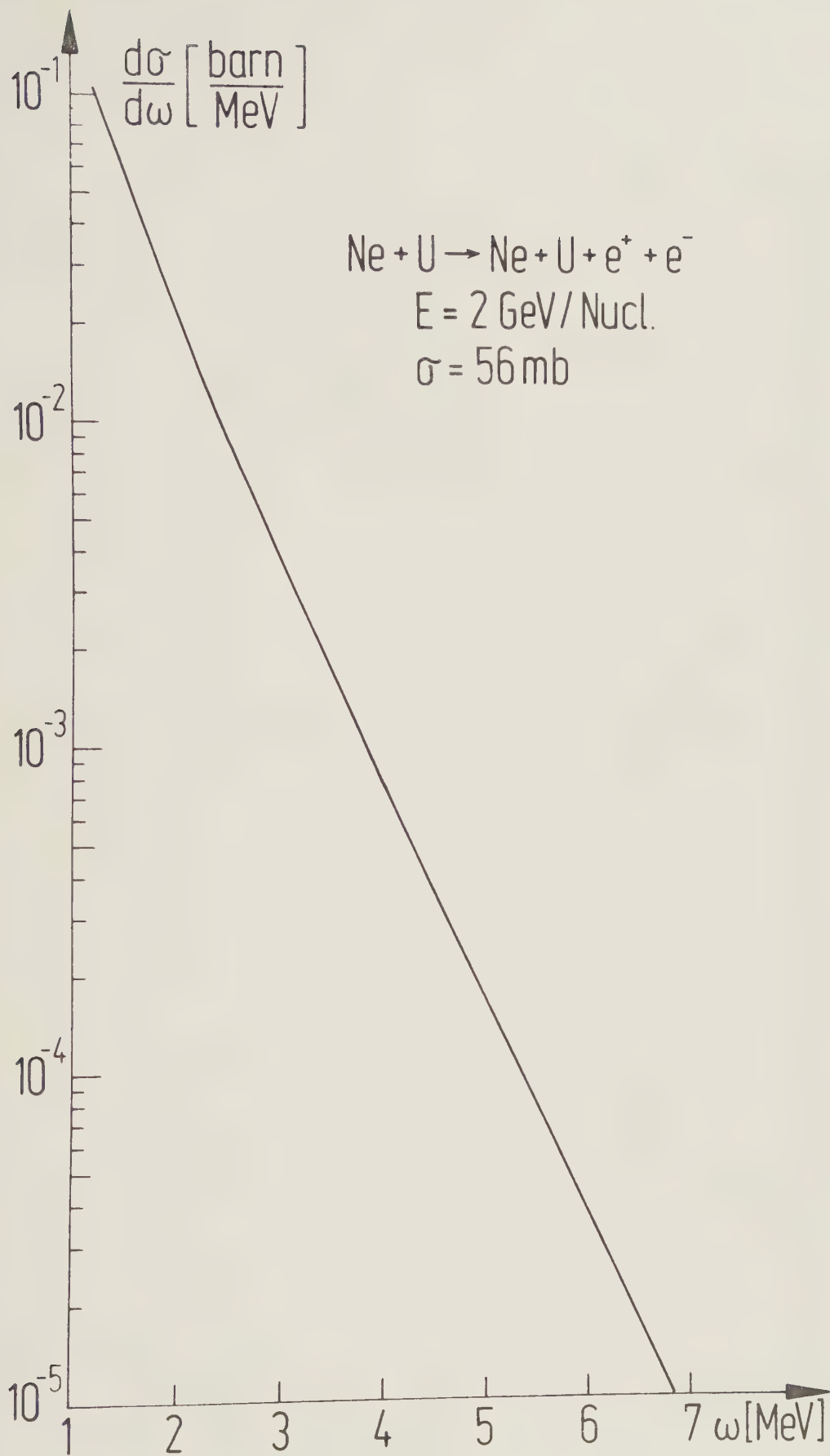
Figur 43



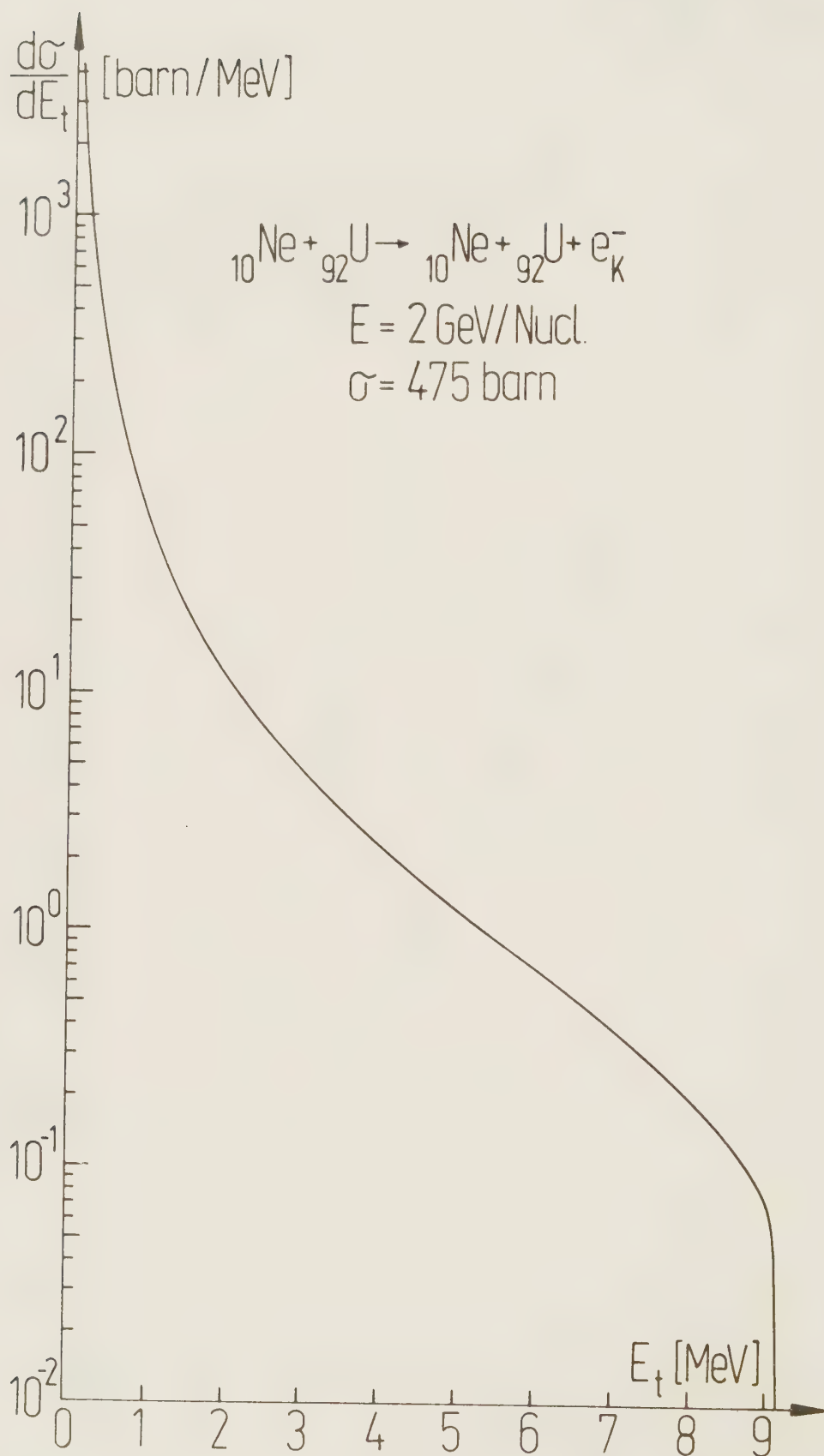
Figur 44



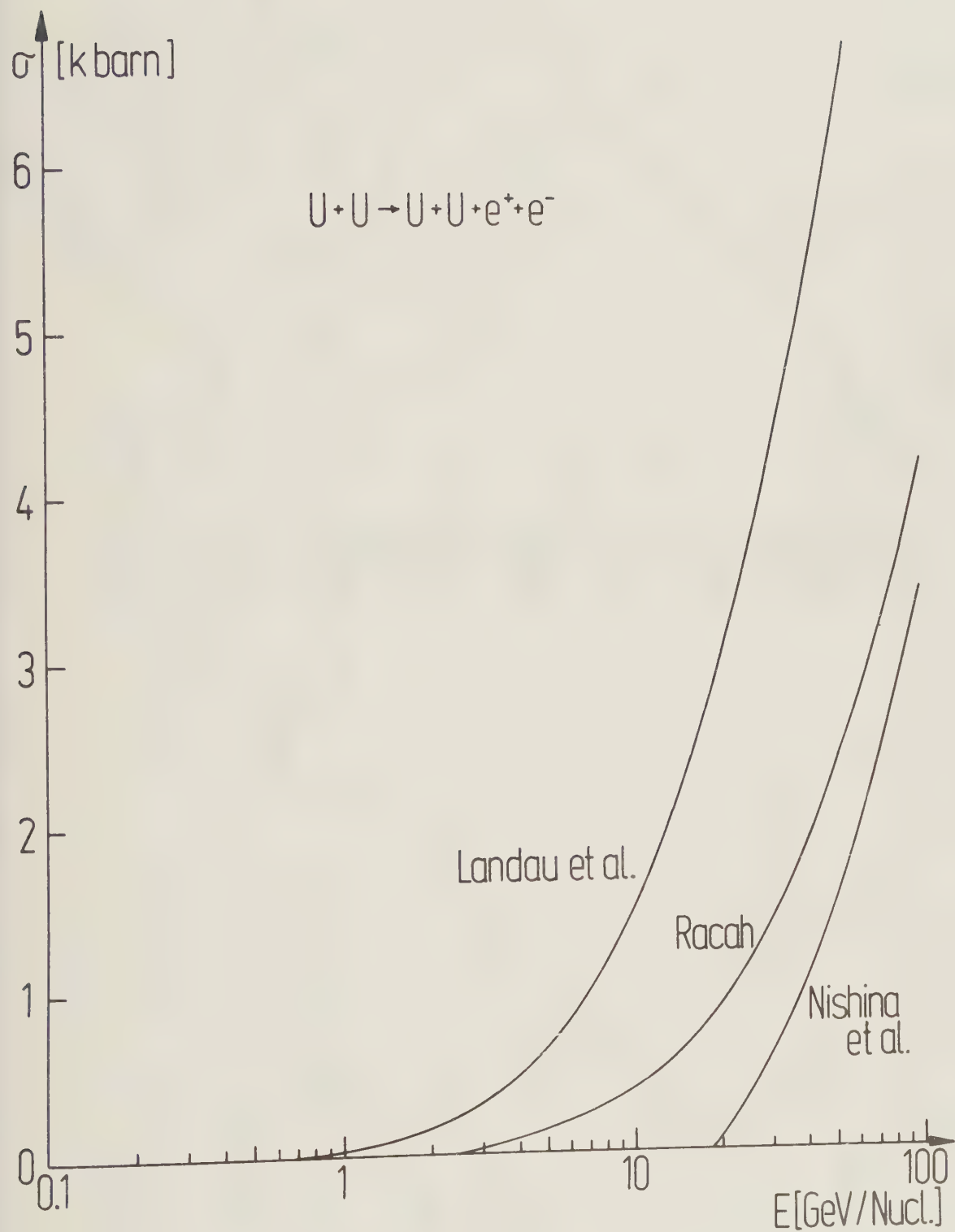
Figur 45



Figur 46

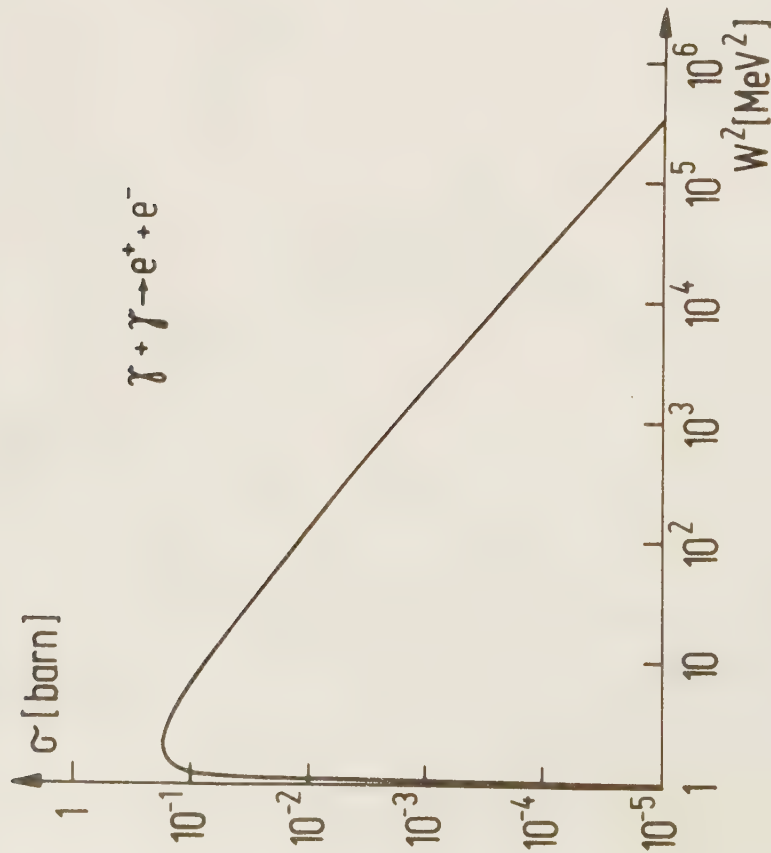


Figur 47

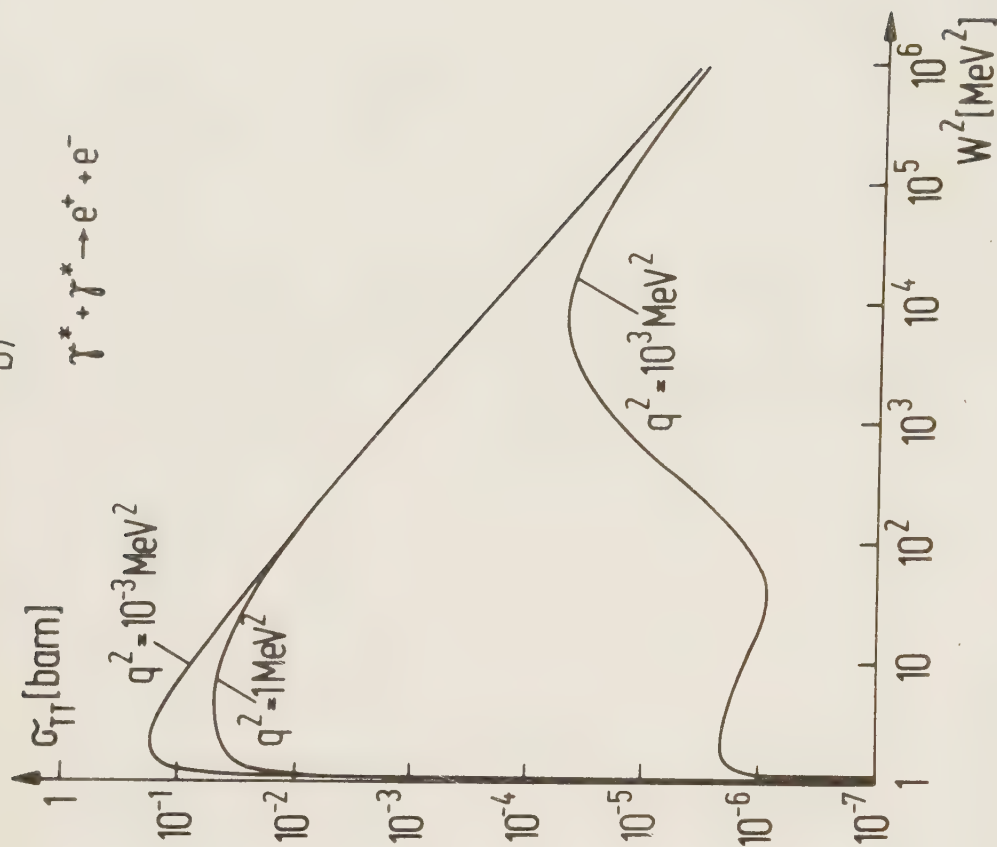


Figur 48

a)

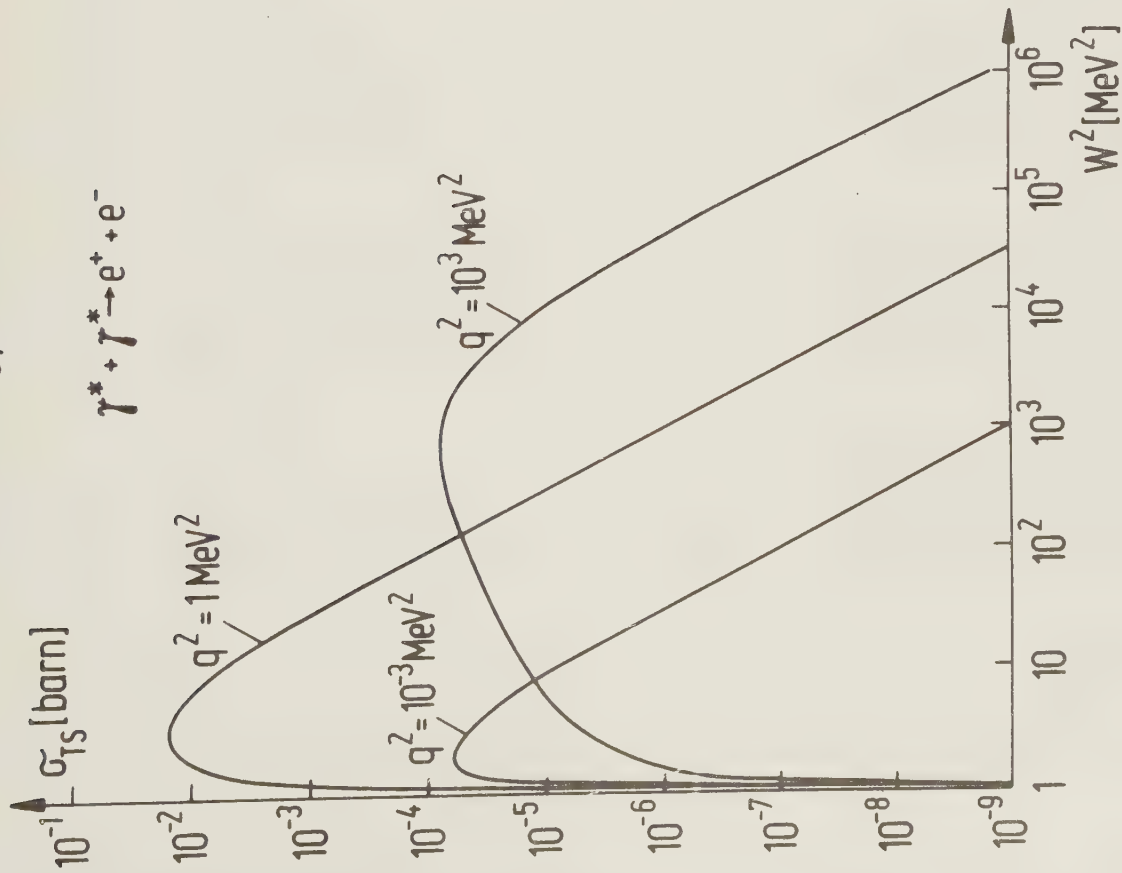


b)



Figur 49

c)



d)

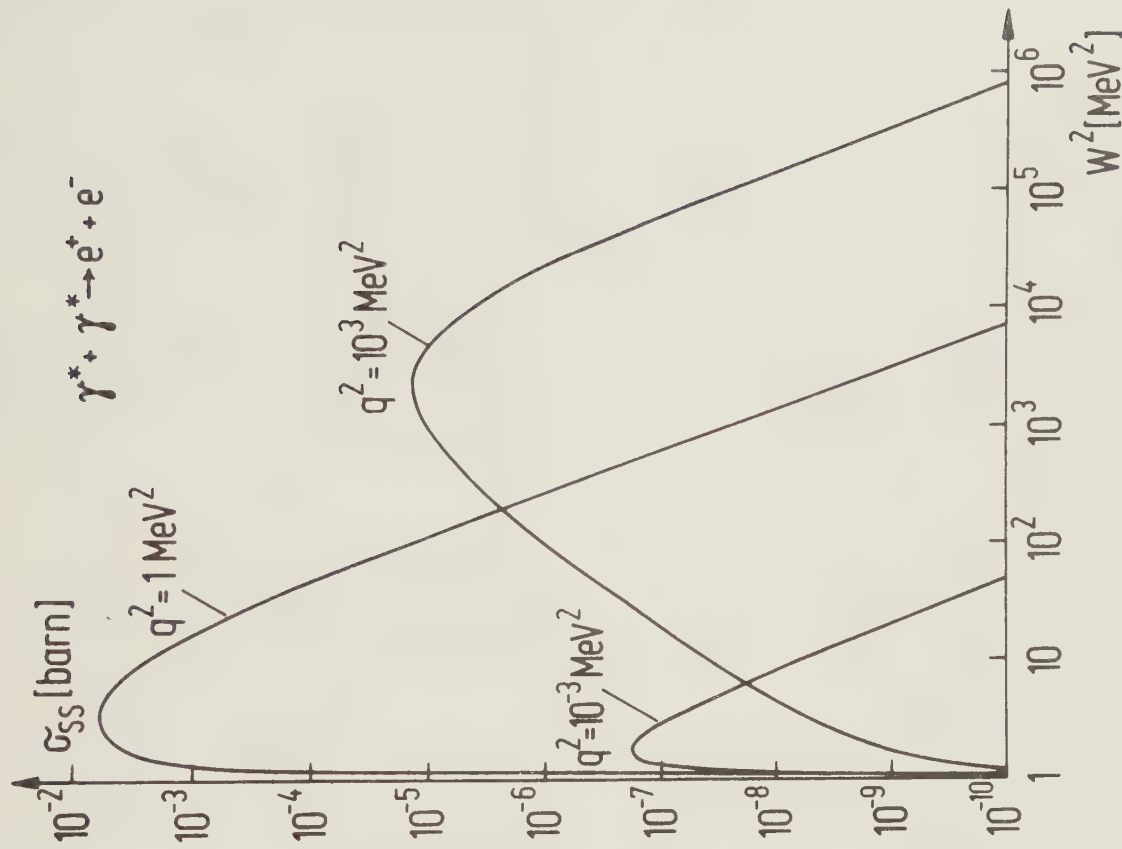


Figure 49

Z = 134

	$1s_{1/2}$	$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$	$3s_{1/2}$	$3p_{1/2}$	$3p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$
$2s_{1/2}$	1.15 (1)	-	8.06 (-4)	-	-	-	-	-	-
$2p_{1/2}$	1.22 (2)	-	-	-	-	-	-	-	-
$2p_{3/2}$	1.44 (2)	-	-	-	-	-	-	-	-
$3s_{1/2}$	3.50 (0)	1.37 (1)	1.71 (-1)	1.31 (0)	-	1.95 (-7)	-	-	-
$3p_{1/2}$	1.23 (1)	1.48 (-2)	6.64 (-1)	1.48 (-2)	-	-	-	-	-
$3p_{3/2}$	3.98 (1)	1.08 (1)	4.90 (-3)	2.34 (-2)	-	-	-	-	-
$3d_{3/2}$	1.26 (0)	7.22 (-2)	8.22 (-2)	1.37 (0)	1.68 (0)	3.90 (-3)	-	-	-
$3d_{5/2}$	9.74 (-1)	9.52 (-1)	1.71 (1)	1.19 (1)	3.97 (-3)	2.02 (0)	-	-	-
$4s_{1/2}$	1.10 (0)	1.26 (0)	1.67 (-2)	2.82 (-1)	1.08 (-2)	9.51 (-5)	-	-	-
$4p_{1/2}$	2.86 (0)	7.35 (-3)	2.04 (-1)	3.34 (-3)	4.37 (-5)	1.14 (-1)	5.68 (-6)	2.71 (-5)	1.36 (-7)
$4p_{3/2}$	1.24 (1)	2.87 (0)	2.22 (-3)	7.35 (-3)	7.79 (-1)	1.77 (-5)	6.46 (-5)	7.09 (-2)	3.86 (-2)
$4d_{3/2}$	4.71 (-1)	1.12 (-1)	3.08 (-2)	3.07 (-1)	6.88 (-2)	1.53 (-3)	4.30 (-3)	1.47 (-4)	1.47 (-4)
$4d_{5/2}$	3.74 (-1)	2.49 (-1)	5.44 (0)	3.05 (0)	1.07 (-2)	1.81 (-3)	6.00 (-4)	2.35 (-4)	5.45 (-4)
$4f_{5/2}$	8.39 (-6)	3.66 (-1)	6.64 (-3)	-	8.27 (-3)	4.01 (-6)	2.35 (-4)	1.35 (0)	5.77 (-2)
$4f_{7/2}$	-	-	-	-	5.61 (-8)	-	2.94 (-5)	1.14 (0)	-

Z = 145

	$1s_{1/2}$	$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$	$3s_{1/2}$	$3p_{1/2}$	$3p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$
$2s_{1/2}$	3.34 (1)	-	1.33 (-1)	-	-	-	-	-	-
$2p_{1/2}$	1.35 (2)	-	-	-	-	-	-	-	-
$2p_{3/2}$	1.60 (2)	-	-	-	-	-	-	-	-
$3s_{1/2}$	9.38 (0)	4.05 (1)	9.06 (-1)	1.38 (0)	-	7.30 (-3)	-	-	-
$3p_{1/2}$	4.53 (0)	6.77 (-2)	6.54 (-1)	1.12 (-2)	-	-	-	-	-
$3p_{3/2}$	4.73 (1)	2.36 (1)	2.91 (-2)	3.97 (-2)	-	-	-	-	-
$3d_{3/2}$	1.54 (0)	9.72 (-1)	2.55 (-1)	1.88 (0)	4.61 (0)	2.27 (-2)	3.92 (-4)	-	-
$3d_{5/2}$	1.03 (0)	2.01 (0)	1.94 (1)	1.64 (1)	2.18 (-2)	7.31 (0)	4.82 (-2)	-	-
$4s_{1/2}$	2.91 (0)	2.44 (0)	4.24 (-2)	2.10 (-1)	5.48 (-2)	9.80 (-4)	1.66 (-5)	1.66 (-5)	7.91 (-6)
$4p_{1/2}$	7.07 (-1)	3.25 (-2)	2.16 (-1)	1.27 (-2)	2.03 (-4)	1.25 (-1)	4.05 (-5)	4.05 (-5)	2.15 (-8)
$4p_{3/2}$	1.52 (1)	5.37 (0)	1.22 (-2)	1.28 (-2)	1.91 (0)	1.02 (-4)	5.13 (-2)	5.13 (-2)	6.05 (-2)
$4d_{3/2}$	6.05 (-1)	9.75 (-2)	8.82 (-2)	1.28 (-2)	5.73 (-1)	4.25 (-3)	6.35 (-3)	6.35 (-3)	2.63 (-4)
$4d_{5/2}$	4.15 (-1)	5.93 (-1)	6.82 (0)	4.24 (-1)	1.24 (-2)	4.34 (-1)	1.10 (-3)	1.10 (-3)	9.70 (-4)
$4f_{5/2}$	1.94 (-5)	7.92 (-1)	1.75 (-2)	4.35 (0)	4.28 (-3)	2.21 (-4)	7.65 (-1)	4.28 (-4)	-

Z = 164

	$1s_{1/2}$	$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$	$3s_{1/2}$	$3p_{1/2}$	$3p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$
$2s_{1/2}$	1.42 (2)	-	1.43 (1)	-	-	-	-	-	-
$2p_{1/2}$	6.33 (1)	-	-	-	-	-	-	-	-
$2p_{3/2}$	1.45 (2)	1.71 (2)	9.19 (0)	-	-	-	-	-	-
$3s_{1/2}$	3.23 (1)	8.18(-1)	2.27(-1)	3.47(-1)	-	5.65(-1)	-	-	-
$3p_{1/2}$	8.63 (0)	7.24 (1)	4.78(-1)	-	-	-	-	-	-
$3p_{3/2}$	4.91 (1)	2.26 (1)	2.59 (0)	9.19(-2)	1.55 (1)	1.81(-1)	-	-	-
$3d_{3/2}$	1.47 (0)	5.94 (0)	1.22 (1)	3.06 (0)	2.63(-1)	3.62 (1)	5.38(-4)	-	-
$3d_{5/2}$	7.29(-1)	5.68 (0)	1.25(-1)	2.68 (1)	5.66(-1)	2.47(-2)	1.30(-1)	8.97(-5)	-
$4s_{1/2}$	9.40 (0)	3.49(-1)	2.81(-2)	2.98(-2)	2.51(-3)	1.70(-2)	6.03(-2)	6.84(-7)	-
$4p_{1/2}$	2.96 (0)	9.55 (0)	1.51(-1)	7.23(-2)	7.40 (0)	1.78(-3)	3.27(-8)	-	-
$4p_{3/2}$	1.68 (1)	5.86 (0)	8.53(-1)	3.13(-2)	3.79 (0)	5.34(-2)	5.23(-3)	1.17(-2)	1.22(-1)
$4d_{3/2}$	6.18(-1)	2.04 (0)	5.00 (0)	6.78(-1)	3.54(-4)	8.07 (0)	2.47(-1)	2.79(-3)	6.27(-4)
$4d_{5/2}$	3.20(-1)	2.15 (0)	5.47(-2)	7.45 (0)	2.77(-2)	9.56(-3)	1.28 (0)	1.07(-3)	2.30(-3)
$4f_{5/2}$	5.07(-5)	-	-	-	4.94(-6)	-	-	3.72 (0)	1.50(-1)
$4f_{7/2}$	-	-	-	-	-	-	-	2.28(-4)	2.97 (0)

Z = 173

	$1s_{1/2}$	$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$	$3s_{1/2}$	$3p_{1/2}$	$3p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$
$2s_{1/2}$	2.26 (2)	-	4.52 (1)	-	-	-	-	-	-
$2p_{1/2}$	3.32 (1)	-	-	-	-	-	-	-	-
$2p_{3/2}$	1.27 (2)	2.69 (2)	1.71 (1)	-	-	-	-	-	-
$3s_{1/2}$	4.75 (1)	2.30 (0)	2.64 (0)	3.73(-2)	-	1.41 (0)	-	-	-
$3p_{1/2}$	1.99 (1)	1.03 (2)	1.10 (0)	-	-	-	-	-	-
$3p_{3/2}$	4.61 (1)	4.62 (1)	5.27 (0)	1.35(-1)	2.16 (1)	3.10(-1)	-	-	-
$3d_{3/2}$	1.24 (0)	8.83 (0)	8.90 (0)	3.77 (0)	6.46(-1)	5.57 (1)	6.27(-4)	-	-
$3d_{5/2}$	5.40(-1)	7.39 (0)	1.49(-1)	3.30 (1)	1.30 (0)	6.70(-2)	2.09(-1)	1.90(-4)	-
$4s_{1/2}$	1.34 (1)	9.26(-1)	5.60(-1)	3.93(-1)	7.44(-3)	1.63(-5)	7.98(-3)	-	-
$4p_{1/2}$	5.57 (0)	9.83 (0)	3.12(-1)	1.05(-1)	1.20 (1)	5.75(-3)	-	-	-
$4p_{3/2}$	1.63 (1)	1.31 (1)	1.78 (0)	4.74(-2)	6.15 (0)	1.08(-1)	7.90(-3)	1.54(-2)	1.67(-1)
$4d_{3/2}$	5.42(-1)	3.20 (0)	3.83 (0)	8.20(-1)	9.21(-3)	1.48 (1)	3.29(-1)	4.19(-3)	9.10(-4)
$4d_{5/2}$	2.45(-1)	2.95 (0)	6.74(-2)	9.41 (0)	1.42(-1)	2.77(-2)	1.58 (0)	1.60(-3)	3.35(-3)
$4f_{5/2}$	8.50(-5)	-	-	-	1.53(-5)	-	-	4.84 (0)	1.92(-1)
$4f_{7/2}$	-	-	-	-	-	-	-	3.92(-4)	3.80 (0)

Z = 112

	$1s_{1/2}$	$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$	$3s_{1/2}$	$3p_{1/2}$	$3p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$
$2s_{1/2}$	1.08 (0)	-	-	-	-	-	-	-	-
$2p_{1/2}$	6.24 (1)	2.16 (-4)	-	-	-	-	-	-	-
$2p_{3/2}$	8.80 (1)	1.27 (0)	-	-	-	-	-	-	-
$3s_{1/2}$	3.47 (-1)	7.54 (-4)	6.63 (-3)	5.39 (-1)	-	-	-	-	-
$3p_{1/2}$	1.04 (1)	2.73 (0)	2.64 (-1)	7.16 (-3)	-	-	-	-	-
$3p_{3/2}$	2.16 (1)	1.03 (0)	2.10 (-4)	7.09 (-3)	-	-	-	-	-
$3d_{3/2}$	5.49 (-1)	1.90 (-1)	1.88 (-2)	6.41 (-1)	2.55 (-4)	1.12 (-4)	2.20 (-4)	4.85 (-7)	2.44 (-5)
$3d_{5/2}$	5.38 (-1)	2.76 (-1)	2.16 (-3)	5.61 (0)	1.69 (-1)	1.74 (-1)	8.73 (-3)	3.42 (-5)	6.25 (-8)
$4s_{1/2}$	1.08 (-1)	3.73 (-4)	7.64 (-2)	1.38 (-1)	1.38 (-4)	1.17 (-6)	7.70 (-2)	2.73 (-2)	1.40 (-2)
$4p_{1/2}$	2.69 (0)	7.70 (-1)	9.49 (-5)	1.35 (-3)	1.99 (-6)	4.14 (-2)	7.70 (-2)	3.03 (-4)	3.72 (-5)
$4p_{3/2}$	6.15 (0)	3.97 (-1)	6.49 (-3)	2.08 (-3)	1.67 (-1)	6.86 (-7)	3.03 (-4)	1.75 (-3)	1.38 (-4)
$4d_{3/2}$	1.84 (-1)	3.92 (-2)	2.17 (0)	1.39 (-1)	1.73 (-2)	5.66 (-4)	2.82 (-4)	1.44 (-4)	5.09 (-1)
$4d_{5/2}$	1.83 (-1)	6.27 (-2)	7.66 (-4)	1.31 (0)	3.06 (-3)	1.17 (-1)	3.09 (-2)	5.73 (-5)	2.26 (-2)
$4f_{5/2}$	8.58 (-7)	-	-	-	3.60 (-2)	1.28 (-6)	2.16 (-1)	4.41 (-6)	4.44 (-1)
$4f_{7/2}$	-	-	-	-	1.50 (-9)	-	-	-	-

Z = 158

	$1s_{1/2}$	$2s_{1/2}$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$	$3s_{1/2}$	$3p_{1/2}$	$3p_{3/2}$	$3d_{3/2}$	$3d_{5/2}$
$2s_{1/2}$	9.61 (1)	-	4.86 (0)	-	-	-	-	-	-
$2p_{1/2}$	9.18 (1)	-	-	-	-	-	-	-	-
$2p_{3/2}$	1.55 (2)	1.17 (2)	5.10 (0)	-	-	-	-	-	-
$3s_{1/2}$	2.34 (1)	3.86 (-1)	1.85 (-2)	7.17 (-1)	-	-	-	-	-
$3p_{1/2}$	1.99 (0)	5.38 (1)	2.24 (-1)	5.89 (-4)	-	2.36 (-1)	-	-	-
$3p_{3/2}$	5.01 (1)	1.17 (1)	1.36 (0)	7.09 (-2)	-	-	-	-	-
$3d_{3/2}$	1.57 (0)	4.37 (0)	1.52 (1)	2.65 (0)	1.14 (1)	1.12 (-1)	-	-	-
$3d_{5/2}$	8.54 (-1)	4.55 (0)	9.81 (-2)	2.31 (1)	1.30 (-1)	2.47 (1)	-	-	-
$4s_{1/2}$	6.95 (0)	1.71 (-1)	1.94 (-2)	8.14 (-3)	2.95 (-1)	1.07 (-2)	-	-	-
$4p_{1/2}$	1.02 (0)	8.63 (0)	7.74 (-2)	4.97 (-2)	1.17 (-3)	4.78 (-2)	4.86 (-4)	5.35 (-5)	1.95 (-8)
$4p_{3/2}$	1.68 (1)	2.74 (0)	4.44 (-1)	2.37 (-2)	5.09 (0)	7.59 (-4)	9.46 (-2)	5.27 (-6)	9.85 (-2)
$4d_{3/2}$	6.47 (-1)	1.44 (0)	5.95 (0)	5.90 (-1)	2.44 (0)	2.91 (-2)	3.94 (-3)	9.70 (-3)	4.83 (-4)
$4d_{5/2}$	3.66 (-1)	1.65 (0)	4.22 (-2)	6.33 (0)	4.34 (-3)	4.49 (0)	2.02 (-1)	2.10 (-3)	1.77 (-3)
$4f_{5/2}$	3.89 (-5)	-	-	-	3.86 (-3)	3.84 (-3)	1.10 (0)	8.10 (-4)	1.27 (-3)
$4f_{7/2}$	-	-	-	-	2.20 (-6)	-	-	3.10 (0)	1.27 (-1)

$\langle R^2 \rangle^{1/2}$ $\langle R \rangle$

1s _{1/2}	4.255 (2)
2s _{1/2}	1.573 (3)
2p _{1/2}	1.121 (3)
2p _{3/2}	2.113 (3)
3s _{1/2}	4.203 (3)
3p _{1/2}	3.733 (3)
3p _{3/2}	5.580 (3)
3d _{3/2}	4.717 (3)
3d _{5/2}	5.123 (3)
4s _{1/2}	8.994 (3)
4p _{1/2}	8.539 (3)
4p _{3/2}	1.179 (4)
4d _{3/2}	1.130 (4)
4d _{5/2}	1.201 (4)
4f _{5/2}	1.079 (4)
4f _{7/2}	1.111 (4)

1s _{1/2}	4.960 (2)
2s _{1/2}	1.844 (3)
2p _{1/2}	1.400 (3)
2p _{3/2}	2.274 (3)
3s _{1/2}	4.842 (3)
3p _{1/2}	4.417 (3)
3p _{3/2}	6.037 (3)
3d _{3/2}	5.125 (3)
3d _{5/2}	5.508 (3)
4s _{1/2}	1.029 (4)
4p _{1/2}	9.960 (3)
4p _{3/2}	1.284 (4)
4d _{3/2}	1.238 (4)
4d _{5/2}	1.305 (4)
4f _{5/2}	1.184 (4)
4f _{7/2}	1.214 (4)

1s _{1/2}	6.092 (2)
2s _{1/2}	2.290 (3)
2p _{1/2}	1.825 (3)
2p _{3/2}	2.558 (3)
3s _{1/2}	5.903 (3)
3p _{1/2}	5.495 (3)
3p _{3/2}	6.850 (3)
3d _{3/2}	5.852 (3)
3d _{5/2}	6.201 (3)
4s _{1/2}	1.252 (4)
4p _{1/2}	1.229 (4)
4p _{3/2}	1.477 (4)
4d _{3/2}	1.436 (4)
4d _{5/2}	1.501 (4)
4f _{5/2}	1.384 (4)
4f _{7/2}	1.413 (4)

1s _{1/2}	5.027 (2)
2s _{1/2}	2.059 (3)
2p _{1/2}	1.584 (3)
2p _{3/2}	2.313 (3)
3s _{1/2}	5.475 (3)
3p _{1/2}	5.043 (3)
3p _{3/2}	6.341 (3)
3d _{3/2}	5.397 (3)
3d _{5/2}	5.746 (3)
4s _{1/2}	1.175 (4)
4p _{1/2}	1.149 (4)
4p _{3/2}	1.385 (4)
4d _{3/2}	1.338 (4)
4d _{5/2}	1.400 (4)
4f _{5/2}	1.289 (4)
4f _{7/2}	1.317 (4)

 $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ $\langle R \rangle$

1s _{1/2}	4.011 (2)
2s _{1/2}	1.641 (3)
2p _{1/2}	1.188 (3)
2p _{3/2}	2.054 (3)
3s _{1/2}	4.475 (3)
3p _{1/2}	4.030 (3)
3p _{3/2}	5.581 (3)
3d _{3/2}	4.722 (3)
3d _{5/2}	5.105 (3)
4s _{1/2}	9.649 (3)
4p _{1/2}	9.286 (3)
4p _{3/2}	1.204 (4)
4d _{3/2}	1.152 (4)
4d _{5/2}	1.218 (4)
4f _{5/2}	1.104 (4)
4f _{7/2}	1.134 (4)

1s _{1/2}	4.960 (2)
2s _{1/2}	1.844 (3)
2p _{1/2}	1.400 (3)
2p _{3/2}	2.274 (3)
3s _{1/2}	4.842 (3)
3p _{1/2}	4.417 (3)
3p _{3/2}	6.037 (3)
3d _{3/2}	5.125 (3)
3d _{5/2}	5.508 (3)
4s _{1/2}	1.029 (4)
4p _{1/2}	9.960 (3)
4p _{3/2}	1.284 (4)
4d _{3/2}	1.238 (4)
4d _{5/2}	1.305 (4)
4f _{5/2}	1.184 (4)
4f _{7/2}	1.214 (4)

1s _{1/2}	6.092 (2)
2s _{1/2}	2.290 (3)
2p _{1/2}	1.825 (3)
2p _{3/2}	2.558 (3)
3s _{1/2}	5.903 (3)
3p _{1/2}	5.495 (3)
3p _{3/2}	6.850 (3)
3d _{3/2}	5.852 (3)
3d _{5/2}	6.201 (3)
4s _{1/2}	1.252 (4)
4p _{1/2}	1.229 (4)
4p _{3/2}	1.477 (4)
4d _{3/2}	1.436 (4)
4d _{5/2}	1.501 (4)
4f _{5/2}	1.384 (4)
4f _{7/2}	1.413 (4)

1s _{1/2}	5.027 (2)
2s _{1/2}	2.059 (3)
2p _{1/2}	1.584 (3)
2p _{3/2}	2.313 (3)
3s _{1/2}	5.475 (3)
3p _{1/2}	5.043 (3)
3p _{3/2}	6.341 (3)
3d _{3/2}	5.397 (3)
3d _{5/2}	5.746 (3)
4s _{1/2}	1.175 (4)
4p _{1/2}	1.149 (4)
4p _{3/2}	1.385 (4)
4d _{3/2}	1.338 (4)
4d _{5/2}	1.400 (4)
4f _{5/2}	1.289 (4)
4f _{7/2}	1.317 (4)

 $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ $\langle R \rangle$

1s _{1/2}	5.027 (2)
2s _{1/2}	2.059 (3)
2p _{1/2}	1.584 (3)
2p _{3/2}	2.313 (3)
3s _{1/2}	5.475 (3)
3p _{1/2}	5.043 (3)
3p _{3/2}	6.341 (3)
3d _{3/2}	5.397 (3)
3d _{5/2}	5.746 (3)
4s _{1/2}	1.175 (4)
4p _{1/2}	1.149 (4)
4p _{3/2}	1.385 (4)
4d _{3/2}	1.338 (4)
4d _{5/2}	1.400 (4)
4f _{5/2}	1.289 (4)
4f _{7/2}	1.317 (4)

1s _{1/2}	5.027 (2)
2s _{1/2}	2.059 (3)
2p _{1/2}	1.584 (3)
2p _{3/2}	2.313 (3)
3s _{1/2}	5.475 (3)
3p _{1/2}	5.043 (3)
3p _{3/2}	6.341 (3)
3d _{3/2}	5.397 (3)
3d _{5/2}	5.746 (3)
4s _{1/2}	1.175 (4)
4p _{1/2}	1.149 (4)
4p _{3/2}	1.385 (4)
4d _{3/2}	1.338 (4)
4d _{5/2}	1.400 (4)
4f _{5/2}	1.289 (4)
4f _{7/2}	1.317 (4)

 $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ $\langle R \rangle$

1s _{1/2}	1.153 (2)
2s _{1/2}	5.707 (2)
2p _{1/2}	1.315 (2)
2p _{3/2}	1.368 (3)
3s _{1/2}	1.795 (3)
3p _{1/2}	1.119 (3)
3p _{3/2}	3.625 (3)
3d _{3/2}	2.992 (3)
3d _{5/2}	3.519 (3)
4s _{1/2}	4.248 (3)
4p _{1/2}	3.301 (3)
4p _{3/2}	7.654 (3)
4d _{3/2}	7.162 (3)
4d _{5/2}	8.006 (3)
4f _{5/2}	7.043 (3)
4f _{7/2}	7.419 (3)

1s _{1/2}	2.081 (2)
2s _{1/2}	8.068 (2)
2p _{1/2}	2.856 (2)
2p _{3/2}	1.642 (3)
3s _{1/2}	2.350 (3)
3p _{1/2}	1.624 (3)
3p _{3/2}	4.267 (3)
3d _{3/2}	3.552 (3)
3d _{5/2}	4.048 (3)
4s _{1/2}	5.312 (3)
4p _{1/2}	4.324 (3)
4p _{3/2}	8.882 (3)
4d _{3/2}	8.398 (3)
4d _{5/2}	9.226 (3)
4f _{5/2}	8.118 (3)
4f _{7/2}	8.481 (3)

1s _{1/2}	4.666 (2)
2s _{1/2}	6.881 (2)
2p _{1/2}	1.994 (2)
2p _{3/2}	1.474 (3)
3s _{1/2}	2.131 (3)
3p _{1/2}	1.435 (3)
3p _{3/2}	3.922 (3)
3d _{3/2}	3.253 (3)
3d _{5/2}	3.750 (3)
4s _{1/2}	4.934 (3)
4p _{1/2}	3.978 (3)
4p _{3/2}	8.293 (3)
4d _{3/2}	7.788 (3)
4d _{5/2}	8.590 (3)
4f _{5/2}	7.587 (3)
4f _{7/2}	7.948 (3)

1s _{1/2}	3.345 (2)
2s _{1/2}	1.237 (3)
2p _{1/2}	7.431 (2)
2p _{3/2}	1.920 (3)
3s _{1/2}	3.412 (3)
3p _{1/2}	2.822 (3)
3p _{3/2}	5.037 (3)
3d _{3/2}	4.234 (3)
3d _{5/2}	4.671 (3)
4s _{1/2}	7.414 (3)
4p _{1/2}	6.712 (3)
4p _{3/2}	1.057 (4)
4d _{3/2}	1.007 (4)
4d _{5/2}	1.082 (4)
4f _{5/2}	9.630 (3)
4f _{7/2}	9.961 (3)

1s _{1/2}	2.564 (2)
2s _{1/2}	1.076 (3)
2p _{1/2}	5.827 (2)
2p _{3/2}	1.729 (3)
3s _{1/2}	3.126 (3)
3p _{1/2}	2.539 (3)
3p _{3/2}	4.644 (3)
3d _{3/2}	3.892 (3)
3d _{5/2}	4.330 (3)
4s _{1/2}	6.921 (3)
4p _{1/2}	6.221 (3)
4p _{3/2}	9.884 (3)
4d _{3/2}	9.359 (3)
4d _{5/2}	1.008 (4)
4f _{5/2}	8.996 (3)
4f _{7/2}	9.325 (3)

 $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ $\langle R \rangle$

1s _{1/2}	1.466 (2)
2s _{1/2}	6.881 (2)
2p _{1/2}	1.994 (2)
2p _{3/2}	1.474 (3)
3s _{1/2}	2.131 (3)
3p _{1/2}	1.435 (3)
3p _{3/2}	3.922 (3)
3d _{3/2}	3.253 (3)
3d _{5/2}	3.750 (3)
4s _{1/2}	4.934 (3)
4p _{1/2}	3.978 (3)
4p _{3/2}	8.293 (3)
4d _{3/2}	7.788 (3)
4d _{5/2}	8.590 (3)
4f _{5/2}	7.587 (3)
4f _{7/2}	7.948 (3)

1s _{1/2}	4.666 (2)
2s _{1/2}	6.881 (2)
2p _{1/2}	1.994 (2)
2p _{3/2}	1.474 (3)
3s _{1/2}	2.131 (3)
3p _{1/2}	1.435 (3)
3p _{3/2}	3.922 (3)
3d _{3/2}	3.253 (3)
3d _{5/2}	3.750 (3)
4s _{1/2}	4.934 (3)
4p _{1/2}	3.978 (3)
4p _{3/2}	8.293 (3)
4d _{3/2}	7.788 (3)
4d _{5/2}	8.590 (3)
4f _{5/2}	7.587 (3)
4f _{7/2}	7.948 (3)

 $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ $\langle R \rangle$

1s _{1/2}	2.564 (2)
2s _{1/2}	1.076 (3)
2p _{1/2}	5.827 (2)
2p _{3/2}	1.729 (3)
3s _{1/2}	3.126 (3)
3p _{1/2}	2.539 (3)
3p _{3/2}	4.644 (3)
3d _{3/2}	3.892 (3)
3d _{5/2}	4.330 (3)
4s _{1/2}	6.921 (3)
4p _{1/2}	6.221 (3)
4p _{3/2}	9.884 (3)
4d _{3/2}	9.359 (3)
4d _{5/2}	1.008 (4)
4f _{5/2}	8.996 (3)
4f _{7/2}	9.325 (3)

1s _{1/2}	2.564 (2)
2s _{1/2}	1.076 (3)
2p _{1/2}	5.827 (2)
2p _{3/2}	1.729 (3)
3s _{1/2}	3.126 (3)
3p _{1/2}	2.539 (3)
3p _{3/2}	4.644 (3)
3d _{3/2}	3.892 (3)
3d _{5/2}	4.330 (3)
4s _{1/2}	6.921 (3)
4p _{1/2}	6.221 (3)
4p _{3/2}	9.884 (3)
4d _{3/2}	9.359 (3)
4d _{5/2}	1.008 (4)
4f _{5/2}	8.996 (3)
4f _{7/2}	9.325 (3)

Z = 112

	$\langle R \rangle$	$\langle R^2 \rangle^{1/2}$
$1s_{1/2}$	5.206(2)	6.291(2)
$2s_{1/2}$	2.134(3)	2.369(3)
$2p_{1/2}$	1.653(3)	1.898(3)
$2p_{3/2}$	2.361(3)	2.611(3)
$3s_{1/2}$	5.656(3)	6.094(3)
$3p_{1/2}$	5.222(3)	5.686(3)
$3p_{3/2}$	6.485(3)	7.003(3)
$3d_{3/2}$	5.525(3)	5.990(3)
$3d_{5/2}$	5.868(3)	6.333(3)
$4s_{1/2}$	1.214(4)	1.293(4)
$4p_{1/2}$	1.189(4)	1.272(4)
$4p_{3/2}$	1.420(4)	1.514(4)
$4d_{3/2}$	1.374(4)	1.475(4)
$4d_{5/2}$	1.436(4)	1.539(4)
$4f_{5/2}$	1.325(4)	1.424(4)
$4f_{7/2}$	1.354(4)	1.453(4)

Z = 158

	$\langle R \rangle$	$\langle R^2 \rangle^{1/2}$
$1s_{1/2}$	1.756(2)	2.419(2)
$2s_{1/2}$	7.884(2)	9.197(2)
$2p_{1/2}$	2.787(2)	3.866(2)
$2p_{3/2}$	1.549(3)	1.724(3)
$3s_{1/2}$	2.401(3)	2.639(3)
$3p_{1/2}$	1.713(3)	1.926(3)
$3p_{3/2}$	4.134(3)	4.493(3)
$3d_{3/2}$	3.441(3)	3.752(3)
$3d_{5/2}$	3.919(3)	4.229(3)
$4s_{1/2}$	5.478(3)	5.888(3)
$4p_{1/2}$	4.555(3)	4.938(3)
$4p_{3/2}$	8.755(3)	9.371(3)
$4d_{3/2}$	8.242(3)	8.881(3)
$4d_{5/2}$	9.017(3)	9.682(3)
$4f_{5/2}$	7.988(3)	8.548(3)
$4f_{7/2}$	8.338(3)	8.900(3)

Tabelle 6

Multipolaritäten

	2s	2p _{1/2}	2p _{3/2}	3s	3p _{1/2}	3p _{3/2}	3d _{3/2}	3d _{5/2}	4s	4p _{1/2}	4p _{3/2}	4d _{3/2}	4d _{5/2}	4f _{5/2}	4f _{7/2}
1s	M1	E1	E1/M2	M1	E1	E1/M2	E2/M1	E2/M3	M1	E1	E1/M2	E2/M1	E2/M3	M2	-
2s	-	E1	E1/M2	M1	E1	E1/M2	E2/M1	E2/M3	M1	E1	E1/M2	E2/M1	E2/M3	-	-
2p _{1/2}	E1	-	E2/M1	E1	M1	E2/M1	E1/M2	M2	E1	M1	E2/M1	E1/M2	M2	-	-
2p _{3/2}	-	-	-	E1/M2	E2/M1	E2/M1	E1	E1/M2	E1/M2	E2/M1	E2/M1	E1	E1/M2	-	-
3s	-	-	-	-	E1	E1/M2	E2/M1	E2/M3	M1	E1	E1/M2	E2/M1	E2/M3	M2	-
3p _{1/2}	-	-	-	E1	-	E2/M1	E1/M2	M2	E1	M1	E2/M1	E1/M2	M2	-	-
3p _{3/2}	-	-	-	-	-	-	E1	E1/M2	E1/M2	E2/M1	E2/M1	E1	E1/M2	-	-
3d _{3/2}	-	-	-	-	-	-	-	E2/M1	E2/M1	E1/M2	E1	E2/M1	E2/M1	E1	M2
3d _{5/2}	-	-	-	-	-	-	-	-	E2/M3	M2	E1/M2	E2/M1	E2/M1	E1	E1/M2

Tabelle 7

Tabelle 8

Transition into the ground-state band	ΔE (keV)	$P_n^C(\vartheta = 180^\circ)$ ($\times 10^3$)	P_γ	$\beta_{E2} \times 10^4$	$\frac{d\sigma_C^{+,-}}{d\Omega}(\vartheta = 180^\circ) \times 10^2$ ($\mu\text{b/sr}$)	$\sigma_C^{+,-}$ (μb)
$2_1^+ - 0^+$	1061.9	6.56	0.458	1.59×10^{-3}	1.396×10^{-2}	0.09
$4_1^+ - 2^+$	1121.5	4.40	0.348	0.0206	0.092	0.52
$6_1^+ - 4^+$	1181.1	3.58	0.355	0.0708	0.262	1.35
$8_1^+ - 6^+$	1240.7	2.73	0.383	0.157	0.354	2.53
$10_1^+ - 8^+$	1300.3	2.03	0.414	0.277	0.682	3.88
$12_1^+ - 10^+$	1359.9	2.28	0.435	0.430	1.246	5.13
$14_1^+ - 12^+$	1419.5	5.48	0.439	0.610	4.290	6.06
$16_1^+ - 14^+$	1479.1	10.07	0.421	0.814	10.096	6.56
$18_1^+ - 16^+$	1538.3	12.92	0.387	1.038	15.192	6.55
$20_1^+ - 18^+$	1598.3	14.45	0.344	1.279	18.610	6.20
$22_1^+ - 20^+$	1657.9	11.69	0.298	1.533	15.642	5.85
$24_1^+ - 22^+$	1717.5	10.78	0.256	1.798	14.536	5.62
$26_1^+ - 24^+$	1777.1	12.55	0.219	2.072	16.698	4.56
$28_1^+ - 26^+$	1836.7	12.27	0.187	2.352	15.834	3.21
$2_2^+ - 0^+$	1038.7	4.49	0.300	1.25×10^{-4}	4.92×10^{-4}	0.003
$4_2^+ - 2^+$	1098.3	2.25	0.514	9.93×10^{-3}	0.034	0.353
$6_2^+ - 4^+$	1157.9	3.87	0.642	0.0471	0.342	1.57
$8_2^+ - 6^+$	1217.5	2.32	0.729	0.119	0.590	3.28
$10_2^+ - 8^+$	1277.1	2.89	0.785	0.226	1.500	4.96
$12_2^+ - 10^+$	1336.7	2.96	0.815	0.367	2.590	6.21
$14_2^+ - 12^+$	1396.3	4.68	0.823	0.537	6.054	6.92
$16_2^+ - 14^+$	1455.9	1.96	0.813	0.732	3.416	7.03
$18_2^+ - 16^+$	1515.5	5.82	0.789	0.949	12.758	6.86
$20_2^+ - 18^+$	1575.1	8.08	0.754	1.184	21.122	6.96
$22_2^+ - 20^+$	1634.7	1.97	0.713	1.433	5.886	5.73
$24_2^+ - 22^+$	1694.3	10.96	0.667	1.694	36.270	5.88
$26_2^+ - 24^+$	1753.9	22.14	0.621	1.964	79.204	6.16
$28_2^+ - 26^+$	1813.5	16.69	0.576	2.242	63.226	5.04

Tabelle 9

System	$\Delta E(2^+ \rightarrow 0^+)$ (MeV)	$\beta_{E2} \times 10^4$	$\sigma_C^{2^+}$ (mb)	$\sigma_C^{e^+}$ (mb)
$^{132}_{54}\text{Xe}-^{142}_{60}\text{Nd}$	1.570	1.16	1190.4	0.138
$^{132}_{54}\text{Xe}-^{140}_{58}\text{Ce}$	1.596	1.27	1180.9	0.15
$^{132}_{54}\text{Xe}-^{138}_{56}\text{Ba}$	1.426	0.63	1372.5	0.0865
$^{58}_{28}\text{Ni}-^{58}_{28}\text{Ni}$	1.453	0.72	406.4	0.029
$^{58}_{28}\text{Ni}-^{60}_{28}\text{Ni}$	1.332	0.355	321.7	0.0259
$^{208}_{82}\text{Pb}-^{208}_{82}\text{Pb}$	4.086	12.06	43.0	0.0519

Lebenslauf

Geboren wurde ich am 30. 12. 1949 in Amöneburg, Landkreis Marburg, als Sohn von Kurt Soff und Ilse Soff, geborene Schwandt. Seit 1952 wohne ich in Frankfurt am Main. Meine Einschulung erfolgte 1956 in die Dornbusch Schule. Die Mittlere Reife legte ich 1966 an der Anne - Frank Realschule ab, das Abitur bestand ich 1968 an der Ernst - Reuter Schule. Im Wintersemester 1968 begann ich das Studium der Physik an der Johann Wolfgang Goethe - Universität, wo ich 1970 die Prüfungen für das Vordiplom und 1972 für das Diplom erfolgreich absolvierte. Anschließend wurde ich wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik. Seit 1969 bin ich verheiratet und habe nun einen Sohn und eine Tochter.

Frankfurt am Main, den 7. 1. 1977

Gerhard Soff

Meine akademischen Lehrer waren

Prof. Dr. W. Greiner, Prof. Dr. W. Scheid,
Prof. Dr. E. Schopper, Prof. Dr. W. Martienssen,
Prof. Dr. H. Dänzer, Prof. Dr. W. Gleissberg,
Prof. Dr. W. Lohmann, Prof. Dr. G. Köthe,
Prof. Dr. M. Reichert, Prof. Dr. H. Kerner,
Prof. Dr. F. Stummel, Prof. Dr. W. Schwarz, Dr. A. Doiwa

Herrn Prof. Dr. W. Greiner gebührt außerordentlicher Dank für die gute Betreuung bei der Entwicklung meiner Dissertation. Seine wissenschaftliche Intuition und sein forschender Elan haben auch diese Arbeit geprägt. Herzlich bedanken möchte ich mich ebenfalls bei Prof. Dr. B. Müller für viele gute Ideen und wertvolle Diskussionen und bei Prof. Dr. W. Scheid für viele wichtige Hinweise, sowie bei meinen Kollegen Völker Oberacker und Joachim Reinhardt für die vorbildliche und fruchtbare Zusammenarbeit. Weiterhin schulde ich großen Dank Frau Utschig für das sorgfältige Zeichnen unzähliger Figuren. Ebenfalls Danksagen möchte ich Frau Knolle und Frau Lasarzig für das Tippen einiger Veröffentlichungen im Zusammenhang mit dieser Dissertation und Herrn Brose für den sauberen Druck der Doktorarbeit. Die Computerzeit wurde vom Hochschulrechenzentrum (HRZ) der Universität Frankfurt am Main und von der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI), Wixhausen zur Verfügung gestellt.

